Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wolters-Noordhoff

816
357
492

jaargang 65 1989 | 1990 december

• Euclides • • • •

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ55,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ35,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ9,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 63 79. Telefaxnr. 01720-9 32 70.

ISSN 01.65-0394

● Inhoud ● ● ● ● ●



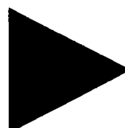
Naar deze alleskunner zijn vele stellingen genoemd...

▶ Kolom 13

George Schoemaker

In de vorige kolom ging het over de C-scholen en ik zegde toe daar meer over te schrijven. Welaan dan. Bij het zoeken van C-scholen zullen we proberen zo veel als mogelijk is van het volgende wensenlijstje per school gerealiseerd te krijgen:
Een school die positief staat t.o.v. de nieuwe ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs en daarin een eigen bijdrage wil leveren.
Een school die onzekerheid, ruimte voor eigen invulling, en experimenteren goed aan kan.
Een school die hiervoor voelt, d.w.z. in een nieuw experiment stappen met een ander eindexamen in 1994.
Een wiskundesectie die een stevige samenwerkingsstructuur kent.
Een sectie met minstens twee vrouwen.
Een school waarvan eventueel een deel (lbo/mavo) kan worden afgesplitst om mee te doen als C-school.
Een school die een gangbare methode gebruikt, enige spreiding in methodes is van belang.

Inmiddels zijn we in gesprek met lerarenopleidingen en de LPC om een opzet te maken voor een samenwerkingsgroep rondom deze C-scholen opdat de mensen die de heroriëntering en de begeleiding verzorgen van de grootscheepse operatie na '92, zelf betrokken zijn geweest in de ontwikkelingen die tot het nieuwe leerplan hebben geleid. We streven ernaar dat het kader van na '92 ook docenten van scholen bevat.



Postzegels

Leonhard Euler (1707-1783)



Een kort stukje over Euler schrijven, dat kan eigenlijk niet. Naar deze alleskunner zijn vele stellingen genoemd, en ook enkele bijzondere lijnen en getallen: de rechte van Euler in een driehoek (dat is de rechte door het zwaartepunt, het middelpunt van de omgeschreven cirkel en het hoogtepunt), de constante van Euler $\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}.......+\frac{1}{n}-\ln n)\right)$, de formule van Euler ($e^{ix}=\cos x+i\sin x$), de stelling van Euler over de aantallen zijvlakken, ribben en hoekpunten van een convex veelvlak ($Z-R+H=2$), enz., enz.
Ook door het Koningsberger bruggenprobleem verwierf Euler faam; Koningsbergen – tegenwoordig Kaliningrad – was de plaats waar Euler jarenlang woonde. Drie postzegels ter ere van hem, in plaats van de gebruikelijke twee, het is slechts simpele rechtvaardigheid.

● Actualiteit ● ● ● ●

▶ In memoriam Prof. Dr. G. R. Veldkamp

M. C. van Hoorn

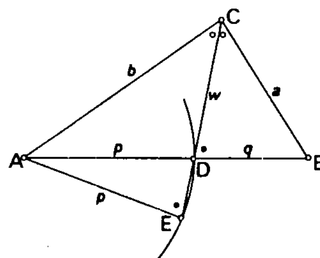
Op 16 september 1989 overleed op 82-jarige leeftijd Prof. Dr. G. R. Veldkamp, emeritus-hoogleraar aan de Technische Universiteit te Eindhoven.
Veldkamp heeft zich jarenlang ingezet voor de kwaliteit van de aktenopleidingen, vooral als redacteur (1948-1964) van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, later als medewerker van de redactie van dat tijdschrift.
Hij wist aldus te bevorderen dat de bezitters van de m.o.-akten wiskunde – welke destijds nieuw waren – gerust de leraarspraktijk konden aanvaarden. De redactie van het Nieuw Tijdschrift heeft, toen Veldkamp op zijn 70-ste jaar afscheid nam als hoogleraar, terecht aandacht gevraagd voor zijn grote verdiensten voor het Nederlandse wiskundeonderwijs. (Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 65, nummer 2, januari 1978.)
Zelf bezat Veldkamp de akten wiskunde l.o., KI en KV, het onderwijzersdiploma en het diploma h.b.s.-B (behaald via het Staatsexamen). Hij studeerde in 1935 af aan de Rijks Universiteit te Groningen, en promoveerde in 1963 met lof bij Prof. Dr. O. Bottema te Delft. In datzelfde jaar werd hij hoogleraar te Eindhoven. Daarvoor was hij leraar geweest te Groningen, en wetenschappelijk hoofdambtenaar en lector te Delft.

Het bijgaande artikel 'De wiskundeakten', dat wij in het voorjaar van 1989 mochten ontvangen, getuigt nog eens van Veldkamps grote toewijding aan het wiskundeonderwijs in al zijn facetten.
Wij prijzen ons gelukkig het artikel te kunnen plaatsen.
Velen, vooral de lezers van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, hebben Veldkamp leren kennen als degene die meetkundige problemen op vaak zeer originele wijze wist op te lossen. Als geen ander wist hij omslachtig rekenwerk, waaronder begrepen het gebruiken van trigonometrische formules, te vermijden; hij zocht en vond veelal een *elementaire* oplossing.
Wij gedenken Prof. Veldkamp met respect. Als hommage aan hem nemen wij een kort, voor hem typerend artikel over uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (verschenen als Sprokkel 184, in jaargang 64, nummer 5, mei 1977).

Twee stellingen over de binnendeellijn

Prof. dr. G. R. Veldkamp

De binnendeellijn van $\angle ACB$ van $\triangle ABC$ moge AB snijden in D. De zijden van de driehoek geven we op de gebruikelijke manier met a, b en c aan en we stellen verder $AD = p$, $BD = q$, $CD = w$. Is nu $a < b$ dan is $\angle ADC > \frac{1}{2}\pi$. De cirkel (A,p) snijdt CD, behalve in D, dus nog in een punt E op het verlengde van CD. Men ziet nu direct:



$\triangle ACE \backsim \triangle BCD$. Er is dus een positief getal λ, zodanig dat

$$p = \lambda q,\ b = \lambda a,\ CE = \lambda w. \qquad (1)$$

Hieruit blijkt de juistheid van de bekende verdelingsstelling:

$$p : q = b : a.$$

Voor de macht van C ten opzichte van cirkel (A,p) geldt: $w \cdot CE = b^2 - p^2$ en dus door (1) te gebruiken: $w^2 = ab - pq$, de eveneens welbekende formule ter berekening van w. Dat de resultaten ook gelden als $a = b$, is triviaal.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ De wiskundeakten

G. R. Veldkamp

Ter inleiding

Het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde heeft zich van zijn oprichting af tot doel gesteld 'dienstbaar te zijn aan de belangen van allen die een docerende taak vervullen bij het niet-universitaire wiskunde-onderwijs of zich op een dergelijke taak voorbereiden, in het bijzonder door studie voor de akten wiskunde l.o. en wiskunde m.o.-A'. Op de vraag in hoeverre het tijdschrift aan deze doelstelling heeft beantwoord, zullen we in dit opstel niet speciaal ingaan. We zullen ons in hoofdzaak bezig houden met de akten die in de loop der jaren invloed hebben gehad op de inhoud van de verschillende jaargangen. En dat zijn, behalve de beide genoemde, ook KI, KV en m.o.-B.
De reden voor het creëren van allerlei speciale akten ligt natuurlijk in de ontwikkeling van het onderwijs als geheel. Enkele opmerkingen hierover mogen dan ook niet ontbreken.

De wetten van 1801, 1803 en 1806

In onze eerste onderwijswet (1801) werd bepaald dat de verplichte leervakken op de lagere school – basisschool zeggen we tegenwoordig – *lezen, schrijven* en *rekenen* waren. De wet werd in 1803 door een nieuwe vervangen en deze maakte in 1806 plaats voor een derde, die het uithield tot 1857. De verdienste van de wet van 1806 was onder meer dat *Nederlandse Taal* een verplicht vak werd.
Rekenen evenwel was het vak dat door de meesters het meest geestdriftig werd onderwezen en beoefend. Rekenboekjes waren er te kust en te keur en zeer veel meesters rustten niet voor ze zelf zo'n werkje op de markt hadden gebracht, soms met de wonderlijkste opgaven. Een ware kei in het bedenken van bizarre vraagstukken was een onderwijzer in Zeeland, H. Sluyters. Behalve een 'Practisch Cijferboek.....' verscheen van zijn hand ook nog 'Verzameling van Rekenkundige Opgaven', 800 opgaven, echt voer voor de liefhebbers die, wat fantasie in de probleemstellingen aanging, bereid waren door dik en dun te gaan.

Een voorbeeld. 'Een man laat bij zijn sterven eene zwangere vrouw en een vermogen van 12.000 gulden na; hij heeft bij uitersten wil bepaald, dat, ingevalle zijne weduwe eenen zoon ter wereld brengt, deze 4000 gulden en de moeder 8000 gulden zal bekomen, doch dat, indien zij een dochter baart, deze 8000 gulden en de moeder 4000 gulden zal ontvangen. Wanneer nu de moeder drielingen, en wel twee zonen en ééne dochter ter wereld brengt, zoo is de vraag hoe de nalatenschap verdeeld moet worden, wanneer men aanneemt, dat de wilsbeschikking ten doel hebbe, dat de moeder tweemaal zoo veel als een zoon, doch slechts half zoo veel als eene dochter ontvange.'

Ulo en Mulo

Bij de wet van 1857 werd het aantal verplichte vakken uitgebreid en zo kon men nu dus spreken van *uitgebreid lager onderwijs* (het Ulo). Het omvatte de vakken a tot en met k; dat waren (in de volgorde abcdefgik): lezen, schrijven, rekenen, vormleer, taal, geschiedenis, aardrijkskunde, zingen en nuttige handwerken.
Maar aan lagere scholen kon bovendien onderwijs worden gegeven in Frans, Duits, Engels, algemene geschiedenis, wiskunde, handtekenen, landbouwkunde, gymnastiek, en fraaie handwerken (de vakken l tot en met t). Men noemde dit het *meer uitgebreid lager onderwijs* (het Mulo).
Er was een akte voor wiskunde; alleen kennis van algebra en meetkunde was vereist. De volgende onderwijswet (1878) schafte deze akte af. De wiskunde die nodig geacht werd om les te kunnen geven op de lagere scholen waar de vakken l-t

werden onderwezen, werd opgenomen in het programma voor het examen als hoofdonderwijzer (hoofdakte-examen). In het voorbijgaan werd de benaming Mulo afgeschaft en door Ulo vervangen. In de omgangstaal handhaafde het woord Mulo zich met onverklaarbare hardnekkigheid.

De akte wiskunde l.o.

Al heel spoedig kwamen er klachten over onvoldoende kennis en vaardigheid wat het vak wiskunde betrof. Het gevolg was dat in 1890 werd ingesteld wat wij tot op heden de *akte wiskunde l.o.* noemen, met het volgende examenprogramma:
a. Kennis van de vlakke meetkunde, de vlakke driehoeksmeting en de stereometrie.
b. Kennis van de lagere algebra tot en met de vierkantsvergelijkingen, alsmede van de reken- en meetkundige reeksen en de logaritmen.
c. Vaardigheid in het oplossen van eenvoudige stel- en meetkundige vraagstukken.
Zoals veel examenprogramma's muntte dit uit door nonchalance (was vaardigheid in het oplossen van gonio- en stereometrie-opgaven minder gewenst?) en elasticiteit. Het handhaafde zich dan ook lange jaren praktisch ongewijzigd.
Het bezit van de akte gaf bevoegdheid tot het geven van wiskundeonderwijs aan Ulo-scholen, ambachtsscholen en andere onderwijsinrichtingen met een beperkt wiskundeprogramma. Alleen zij die in het bezit waren van de akte als onderwijzer of onderwijzeres werden tot het examen toegelaten. Aanvankelijk bleef de examenstof beperkt tot wat er te vinden was in de boeken voor de Hbs. Wat de vlakke meetkunde aanging veranderde dit al spoedig. De examencommissie liet in haar verslagen weten, te verwachten dat de kandidaten zich ook begrippen als *macht van een punt ten opzichte van een cirkel, machtlijn, machtpunt, gelijkvormigheidspunten, harmonische ligging van punten en lijnen* eigen hadden gemaakt en dat ze deze zaken bij voorkomende gelegenheden zouden weten toe te passen. Ook wat de algebra betreft kwam de commissie met wensen: *volledige inductie, binomium, maxima* en *minima, functiebegrip, grafieken*, enz.

Het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde; studieboeken

Het een en ander had tot gevolg dat er een voelbaar gebrek kwam aan studieboeken, boeken met een op volwassen lezers afgestemde tekst waarin de examenstof volledig en met de vereiste zorgvuldigheid werd behandeld.
Een lichtpuntje was de oprichting in 1913 van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. Hierin werden model-uitwerkingen van de examenopgaven opgenomen; bovendien vonden de lezers er gedegen artikelen in over onderwerpen uit de examenstof en series vraagstukken ter oplossing.
Pas in 1919 verscheen voor het eerst een boek dat speciaal geschreven was voor studerenden voor de lagere akte wiskunde: Lagere Algebra, deel I, door P. Wijdenes. Het tweede deel kwam in 1920 op de markt. Het uitstekende meetkundeboek voor schoolgebruik van dr. P. Molenbroek werd door Wijdenes uitgebreid tot een werk voor de aktestudie; zo verschenen Leerboek der Vlakke Meetkunde (1924) en Leerboek der Stereometrie (1923). Alles wat kandidaten voor l.o. (en KI) nodig hadden was in deze twee boeken te vinden. Samen met Wijdenes' Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie konden studerenden nu beschikken over een complete leergang voor de lagere akte.
Het was allemaal het werk van slechts twee man: Wijdenes de schrijver, eventueel bewerker van de boeken, en Noordhoff de ondernemende uitgever. Het spreekt vanzelf dat de overheid zich tegenover zoveel particulier initiatief niet onbetuigd kon laten: zij schafte bij de onderwijswet van 1920 de akte wiskunde l.o. af! De stof voor deze akte moest maar bij de onderwijzersopleiding met inbegrip van de hoofdakte worden ondergebracht, zo vond men.

Van de wiskundige bagage die een hoofdonderwijzer mee kreeg of althans mee behoorde te krijgen, had men vaak merkwaardige ideeën. Zo schreef Prof. Schuh in 1919/21 zijn Leerboek der elementaire theoretische Rekenkunde (2 delen, ruim 900 bladzijden). De eerste volzin van de Inleiding luidt: 'In dit leerboek, dat in hoofdzaak bestemd is voor *studerenden voor de hoofdakte*, wordt de rekenkunde behandeld geheel van het begin af, zonder dat daarbij eenige feitelijke wiskundige kennis van den lezer aangenomen wordt.' Schuh geeft een opsomming van zaken die in ieder geval behoren te worden gekend: de eigenschappen van optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing; de merk-

waardige produkten en quotiënten; de theorie van de deelbaarheid en de fundamentaalstelling van de rekenkunde; de stellingen van Fermat en Euler; de betekenis van en de formule voor het getal $\varphi(n)$; de formules voor het aantal, de som en het produkt der delers van een getal; de talstelsels, het rekenen in talstelsels en de overgang op een ander talstelsel; rekenkundige reeksen; kenmerken van deelbaarheid; de formule van Legendre ter ontbinding van $n!$; de vierkantsworteltrekking; iets omtrent de eindcijfers van vierkanten; de stelling van Euclides; verschillende vormen van priemgetallen; willekeurige aantallen opvolgende deelbare getallen; de zeef van Eratosthenes; de stelling van Wilson over de deelbaarheid van $(p - 1)! + 1$ door p als p priem is en het omgekeerde daarvan; de splitsing van een getal in een verschil van twee kwadraten.
Het mag ook een ietsje meer zijn volgens deze auteur. Dit was dan het eerste deel; uit het tweede deel, handelend over de breuken, gewone en g-delige, repeterend hetzij tiendelig of g-delig en het rekenen hiermee, nog eens zo'n portie.

De akte bleef

Gelukkig gebeurde er in 1920 gewoon niets. De wet van 1920 is nimmer volledig tot uitvoering gekomen. Voor de akte wiskunde l.o. meldden zich jaarlijks gemiddeld tussen de 250 en 300 gegadigden, van wie er, ook al weer gemiddeld, zo'n 35% slaagden: een veelbegeerde akte, die niet cadeau gegeven werd!
Aan de exameneisen veranderde gedurende een lange reeks van jaren weinig of niets: men behoorde doodgewoon te weten wat er in de boeken van Wijdenes stond! Overigens zal zelfs de minst aandachtige lezer wel een leemte in het programma hebben opgemerkt: er wordt geen onderzoek gedaan naar de pedagogische en didactische bekwaamheid van de kandidaten. Tot het examen werden alleen bezitters van de akte als onderwijzer toegelaten, die bovendien (maar dat was niet vereist) al enkele jaren praktijk hadden. De redenering was eenvoudig: wie in staat is zeer jonge kinderen te leren lezen, schrijven en rekenen, zal ook wel op een verstandige manier wiskunde weten te leren aan leerlingen van Ulo-scholen, ambachtsscholen e.d.

Euclides

Nu moet men niet denken dat er voor de methodische en didactische kanten van het onderwijs in de wiskunde toentertijd geen belangstelling bestond. In 1924 ontvingen de lezers van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde het eerste nummer van het 'Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', dat onder redactie stond van P. Wijdenes en J. H. Schogt en gewijd was aan onderwijsbelangen.
Het werd goed ontvangen en met ingang van de vierde jaargang herdoopt in 'Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken", een naam die tot uitdrukking moest brengen dat ook het onderwijs in mechanica en kosmografie niet werd vergeten. Nog duidelijker werd dit toen het tijdschrift met ingang van jaargang 17 orgaan werd van de verenigingen Liwenagel en Wimecos[1].
De belangstelling voor Euclides van de kant van de nederigste dienaren van het wiskundeonderwijs – de bezitters van de akte l.o. – was dan ook niet erg groot. Hopelijk is dit veranderd sinds Euclides het 'Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren' is geworden.

Het l.o.-programma

Keren we terug van een vermeende leemte in het l.o.-programma naar twee werkelijke leemten. Men zou toch verwachten dat een bezitter van een l.o.-akte een Hbs-leerling zo nodig wel een beetje met de wiskunde zou kunnen helpen; misschien had hij het knaapje op de lagere school wel in de klas gehad. Maar dat was niet zonder meer mogelijk: Beschrijvende Meetkunde stond wel op het leerplan van de Hbs, maar niet op het l.o.-programma. Later gold voor de beginselen van de Differentiaalrekening hetzelfde.
Als recept voor het kweken van wiskundeleraren aan Ulo-scholen, ambachtsscholen, huishoud- en industriescholen, avondnijverheidsscholen e.d. was het programma echter ijzersterk. Pas in 1965 kwam er een verandering (K.B. van 19 november 1965, Staatsblad 522). Het nieuwe programma kende drie hoofdonderdelen:
a. Analyse

b. Meetkunde
c. Didactiek en methodiek
Veel woorden wens ik aan dit programma niet te besteden. Ik geef slechts een citaat.

'In het algemeen kan worden gesteld, dat dit nieuwe programma voor de akte wiskunde l.o. een grote overeenkomst vertoont met de huidige examenstof voor de scholen van vhmo met dien verstande, dat de planimetrie daar niet geëxamineerd wordt, terwijl hier de vlakke meetkunde een belangrijk onderdeel uitmaakt ter wille van het feit, dat deze meetkunde op de Muloscholen een vooraanstaande plaats inneemt. Derhalve zal het gebruik van speciale leerboeken voor de akte wiskunde l.o., behalve voor planimetrie, niet noodzakelijk meer zijn. Elk niet te eenvoudig meer degelijk leerboek voor scholen van vhmo geeft voldoende leerstof en vraagstukkenmateriaal.'

De schrijver van dit staaltje beroerd Nederlands en halfbakken logica is inspecteur van het gymnasiaal en middelbaar onderwijs en – wat erger is – secretaris van de examencommissie lager onderwijs in de wiskunde (Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde jaargang 53, p. 201-202). Hij constateert nog dat het nieuwe programma een weg opent 'in de richting van de moderne wiskunde, waarbij een grote hoeveelheid niet-functionerende parate kennis van weinig belang wordt geacht maar het accent van de opleiding verschoven wordt naar logische opbouw, scherp formuleren en wiskundig inzicht'.
In 1967 werd voor het eerst volgens het nieuwe programma geëxamineerd. Aan het examen mochten nu, behalve degenen die een akte als onderwijzer(es) bezaten ook bezitters van andere bewijzen van bekwaamheid deelnemen, zoals bijvoorbeeld bezitters (m/v) van de akte van bekwaamheid als hoofdleidster (m/v) bij het kleuteronderwijs. Wat het programma betreft bleef het door verschillende oorzaken tobben. Het zou onbehoorlijk veel plaatsruimte vergen hier nader op in te gaan. Maar het bleek nodig om in 1969 het programma nogmaals te wijzigen. De examencommissie gaf een zeer uitvoerige toelichting (Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde jaargang 57, p. 43-53).
Wat de examenresultaten betreft het volgende. In de jaren 1959 tot en met 1968 waren er gemiddeld vrijwel 600 kandidaten per jaar. Het percentage geslaagden bedroeg achtereenvolgens 36,4; 44,4; 35,9; 32,0; 36,5, 30,6; 26,5; 43,8; 34,5; 35,6.
Herhaaldelijk (1971, 1972, 1974) gaf de commissie 'nadere preciseringen van de leerstof voor het examen wiskunde l.o.'
Van de commissie die van 1981 af belast was met het afnemen van de examens, komt de mededeling dat het ministerie van O. en W. belangrijke koerswijzigingen zal aanbrengen in het beleid ten aanzien van de staatsexamens wiskunde l.o. Als gevolg wordt met ingang van 1 januari 1990 afgeschaft de gelegenheid om volgens het vigerende programma examen te doen. De aloude akte wiskunde l.o. verdwijnt. De herinnering aan een taai rakkertje dat verscheidene levensgevaarlijke aanslagen overleefde, blijft.

De middelbare akten

Het middelbaar onderwijs werd in 1863 geregeld door de Wet-Thorbecke. In artikel 23 hiervan werd bepaald dat onderwijzers aan de hogere burgerscholen de titel leraar dragen, terwijl de leraar die aan het hoofd van de school is geplaatst de titel directeur heeft.
Alleen zij die in het bezit waren van de door de wet verlangde bewijzen van bekwaamheid en zedelijkheid mochten middelbaar onderwijs geven. (Deze voorschriften golden voor het geven van *school*-onderwijs, niet voor hen die 'aan kinderen van één gezin onderwijs geven' (huisonderwijs).) De wet was aanvankelijk nogal royaal met het uitdelen van onderwijsbevoegdheden. Zo hadden bijvoorbeeld doctoren en doctorandi in de wis- en natuurkunde bevoegdheid voor wis- en natuurkunde, kosmografie, scheikunde, plantkunde en dierkunde. Ook kandidaten in de wis- en natuurkunde hadden deze bevoegdheden, doch uitsluitend aan de driejarige Hbs. Aan dit laatste kwam een eind in 1920. De onderwijsbevoegdheid voor kandidaten verviel geheel en doctoren en doctorandi kregen alleen onderwijsbevoegdheid voor de vakken waarin zij bij het doctoraal examen geëxamineerd waren.
Het was echter ook mogelijk *akten van bekwaamheid* voor de verschillende onderwijsvakken te behalen: de middelbare akten.
Om te beginnen was er de middelbare akte A voor schoolonderwijs in de wis- en natuurkundige wetenschappen. Het programma hiervoor kwam iet of wat overeen met dat van het kandidaatsexamen wis- en natuurkunde, van die tijd. Dan waren er drie akten B, namelijk voor wis- en werktuigkunde,

voor natuurkunde en voor scheikunde. Om te bevorderen dat het middelbaar onderwijs al dadelijk van het begin af over geschikte leraren kon beschikken, kregen de examencommissies bevoegdheid voor hun programma-onderdeel afzonderlijke akten af te geven.
Zo zijn de akten KI tot en met KXII ontstaan. KI was de ene, KV de andere akte wiskunde. In het begin was men het nog niet eens over de vraag of de akte KV bevoegdheid gaf voor het onderwijs aan de vijfjarige Hbs. In 1878 besliste de minister dat dit *niet* het geval was. De bedoelde bevoegdheid werd pas in 1920 verleend, tegelijk met die voor kosmografie en natuurlijke historie aan de bezitters van de akten KIII respectievelijk KIV. Bij die gelegenheid stelde de minister vast dat het praktisch onmogelijk gebleken was de volledige akten A en B voor de wis- en natuurkundige vakken te verwerven.

Algemene ontwikkeling

Bij de wet van 1920 werd nog een andere kwestie geregeld. Het zal de lezer zijn opgevallen dat aan degenen die zich aan het examen voor een middelbare akte wilden onderwerpen, geen enkele eis van algemene ontwikkeling werd gesteld. Het spreekt vanzelf dat dit een zeer ongewenste toestand was en de examencommissies drongen er dan ook met de regelmaat van een klok bij de minister op aan hieraan iets te doen. In de wet van 1920 werd nu vastgelegd dat slechts diegenen die bewijzen hebben geleverd van voldoende algemene ontwikkeling als voorbereiding voor het beoefenen van het vak waarin zij examen willen afleggen, gerechtigd zijn tot het afleggen van examens volgens de wet op het middelbaar onderwijs. Die algemene ontwikkeling zou moeten blijken uit zekere door de gegadigde over te leggen getuigschriften dan wel akten van bekwaamheid, die bij Algemene Maatregel van Bestuur zouden worden vastgesteld.
Keurig geregeld dus. Het duurde tot 1936 voor het werd uitgevoerd. Toegang tot een examen voor een middelbare akte kregen natuurlijk de bezitters van een einddiploma Hbs of gymnasium en nog vele anderen, zoals bezitters van de hoofdakte, de onderwijzersakte, mits de bezitter in het laatste geval tevens heeft verworven de akten van bekwaamheid hetzij in twee moderne vreemde talen, hetzij in één der moderne vreemde talen en de wiskunde (eventueel de handelskennis). Dwaze bepalingen van het departement zijn kennelijk niet van vandaag of gisteren.

Het programma voor de akte KI

Het examenprogramma voor KI was vastgesteld bij K.B. van 2 februari 1864, Staatsblad 8, en omvatte:
a. De rekenkunde, 'in haren geheelen omvang".
b. De stelkunde. Onder andere hogere machtsvergelijkingen, kettingbreuken, permutaties en combinaties; convergentieonderzoek van oneindige reeksen, reëel en imaginair; reeksontwikkeling van goniometrische, logaritmische en exponentiële functies.
c. Planimetrie en stereometrie.
d. Vlakke driehoeksmeting en boldriehoeksmeting.
e. De beginselen van de beschrijvende meetkunde, omvattende: 'de leerwijze der projectiën, de werkstukken betrekkelijk de regte lijn en het platte vlak, de drievlakkige hoeken, de veelvlakkige lichamen en de bol'.
f. De beginselen van de analytische meetkunde tot en met de kegelsneden en de vergelijkingen van de rechte lijn in de ruimte en van het platte vlak.

De onderdelen b tot en met f werden schriftelijk (3 uur voor telkens 3 opgaven) en mondeling afgenomen, het onderdeel a werd uitsluitend mondeling afgenomen. Dit programma bleef (officieel) ongewijzigd gehandhaafd tot 1916. In dat jaar werd het onderdeel rekenkunde beperkt tot de hoofdbewerkingen, de deelbaarheid, de congruenties, de repeterende breuken, de worteltrekking en het begrip der onmeetbare getallen. In onze ogen eigenlijk maar een wonderlijk ratjetoe.
Wat de beschrijvende meetkunde betreft werd verlangd kennis van de rechthoekige, de scheve, de axonometrische en de centrale projectie. De schriftelijke opgaven waren steeds in rechthoekige projectie.

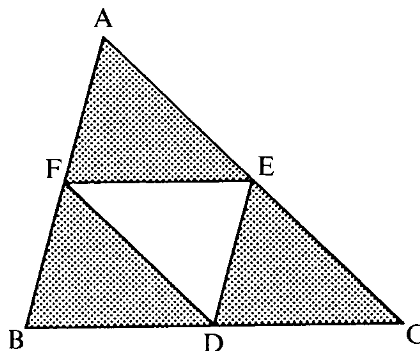
Bij de analytische meetkunde werd voortaan kennis van homogene coördinaten voor punt en rechte lijn verlangd, alsook kennis van kwadratische involuties. Vergelijkingen van rechte en vlak in de ruimte werden geschrapt.
Het zo gewijzigde programma bleef tot 1958 gehandhaafd.

De zogenaamde akte Q

Volgens de wet werd van allen die een akte voor schoolonderwijs verlangen, behalve in het vak zelf, ook een examen in de 'theorie van onderwijs en opvoeding, hoofdzakelijk in betrekking tot het middelbaar onderwijs' verlangd. Een afzonderlijke akte was er voor dit onderdeel niet, ook geen aparte commissie en evenmin een programma. Het werd afgenomen door de commissie voor het vak, in casu KI of KV. De kandidaat zelf merkte er gewoonlijk niets van dat hij voor deze zogenaamde akte Q werd geëxamineerd maar hij moest het bij het mondeling mondeling examen al verschrikkelijk bont maken, wanneer hem, indien hij voor het vakgedeelte verdiende te slagen, niet tegelijkertijd de akte Q werd toegekend. Dat werd dan op het vakdiploma vermeld; dit had wel tot gevolg, dat men Q méér dan eens kon verwerven, bijvoorbeeld eerst bij KI en vervolgens nog eens bij KV. Het lijkt misschien een vreemde gang van zaken maar bij mijn weten zijn er weinig ernstige ongelukken uit voortgekomen. Wel echter een groot aantal uitstekende leraren. De kandidaat die op het mondeling examen geen woord kon uitbrengen, in tranen uitbarstte en door glaasjes water op de been moest worden gehouden kreeg de akte Q niet, maar wel de akte KI voor het geven van huisonderwijs in de wiskunde.

Het mondeling examen

De examencommissie voor het mondeling examen bestond als regel uit hoogleraren. In de samenstelling kwam meestal weinig of geen verandering. Eén van de jarenlange leden was prof. Jan de Vries uit Utrecht, een meetkundige van naam en een uiterst bekwaam en humaan examinator. Bij het mondeling examen tekende hij voor mij bijgaande figuur:



een driehoek ABC met de drie middenparallellen DE, EF en FD.
'Kijk', zei hij, 'als je de buitenste driehoeken naar boven vouwt kun je een viervlak maken'. Ik mompelde bedeesd 'dat moet je bewijzen'. 'Welnee meneer', zei De Vries, 'dat hoeft toch niet, dat spreekt toch vanzelf'. Ik vond het allang goed, want ik begreep dat hij het wilde hebben over het ontstane viervlak en ik wist dat ik daarvan een heleboel wist. Het ging dan ook geweldig goed. Toen we ermee klaar waren, merkte De Vries op dat ik bij het lesgeven aan de leerlingen de stof goed duidelijk moest kunnen maken. 'U kent natuurlijk de inhoudsformule voor een prismoïde; zegt u die maar even'. Antwoord: $\frac{1}{6}h(G + B + 4M)$. 'Nu moet u die formule voor ons bewijzen, maar u mag er niets bij tekenen, alleen maar alles zo beschrijven dat we het voor ons zien'. Ik had die formule zeker wel vijftig maal voor l.o.-kandidaten uitgelegd (met figuur), dus dat ging wel vlot.
Toen ik uitgepraat was, mocht ik gaan. Het examen had zich afgespeeld in een grote zaal en het was een heel eind van het examentafeltje tot de deur. Ik hoorde dat achter mijn rug examinator en bijzitter (ik ben er niet zeker van of het prof. Wolff of prof. Bremekamp was) druk met elkaar fluisterden. En toen riep prof. De Vries mij terug. 'U had wel gelijk', zei hij, 'je moet wel degelijk bewijzen dat er een viervlak ontstaat; dat spreekt helemaal niet vanzelf. Kunt u ons dat in een paar woorden duidelijk maken, zonder figuur?' Dat kon ik, maar het zal niet nodig zijn dit hier uit te leggen: de lezer heeft de zaak natuurlijk al lang doorzien. Ten overvloede wijs ik hem op het themagedeelte van de studiedag

1987 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (Euclides jaargang 63, p. 25-27, in het bijzonder figuur 1, p. 27).

Slot

Tot 1958 bleef de toestand onveranderd. Bij de wet van 20 mei 1955 was een nieuwe regeling van de akten van bekwaamheid ingevoerd. Voortaan sprak men van 'de akten van bekwaamheid en het bewijs van pedagogische en didactische voorbereiding'. In de plaats van KI en KV kwamen de akten wiskunde m.o.-A en m.o.-B. De programma's van de examens voor deze akten werden vastgesteld bij besluit van 8 januari 1958. Het heeft niet veel zin ze hier te reproduceren: in de eerste plaats zijn ze erg summier en in de tweede plaats kwamen er spoedig wijzigingen en nadere toelichtingen. Vermeld zij slechts dat voor KI en KV nog volgens de oude programma's examen kon worden gedaan tot respectievelijk 1 januari 1960 en 1 januari 1962. Tegenwoordig omvat het programma voor m.o.-A de onderdelen Algebra, Analyse, Analytische Meetkunde en Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek. Voor m.o.-B: Analyse, Functietheorie en Hoofdstukken uit de Meetkunde. Voor een uitvoerige omschrijving zij verwezen naar een uitgave van het ministerie van O. en W.
Het is verleidelijk en misschien ook wel leerzaam enkele stellen examenopgaven oude en nieuwe stijl (voor de gelijknamige onderdelen) eens met elkaar te vergelijken. Ook de wijze waarop de uitwerkingen aan de studerenden worden gepresenteerd zou daarbij de aandacht kunnen krijgen. In dit beknopte en oppervlakkige stukje kon daarvan geen sprake zijn.

Noot

1 Liwenagel was de vereniging van *l*eraren *i*n *w*iskunde *e*n *n*atuurkunde *a*an *g*ymnasia *e*n *l*ycea, Wimecos (*wi*skunde, *me*chanica, *cos*mografie) was de zustervereniging voor leraren aan hogereburgerscholen.

Een akte wiskunde l.o. van 63 jaar geleden

AKTE VAN BEKWAAMHEID

VOOR

LAGER ONDERWIJS.

DE COMMISSIE VAN EXAMEN, krachtens artikel 210bis en artikel 210ter, onder c A, der Lager-onderwijswet 1920, door den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen benoemd, heeft in hare zittingen van den 25, 26 Augustus en 16 October 1926 geëxamineerd [illegible] geboren den 9 September 1907 te [illegible], en [illegible] ten gevolge van dat examen uitgereikt de AKTE VAN BEKWAAMHEID voor huis- en schoolonderwijs in de beginselen der Wiskunde.

's Gravenhage, den 16 October 1926

NAMENS DE COMMISSIE,

[illegible] Voorzitter.

[illegible] Secretaris.

HANDTEEKENING VAN DE GEËXAMINEERDE:

[illegible]

L. 1081/'26-4000

Voor de lezer een aardige illustratie van het voorafgaande artikel. Voor de eigenaar die dit document na zo lange jaren weer onder ogen krijgt, een sleutel die een doos vol herinneringen opent. Mijn wiskundeleraar aan de rijkskweekschool vond dat ik best in één adem de onderwijzersakte en de akte wiskunde l.o. kon halen en hij drong er sterk op aan dat ik dit zou proberen. Zelf was ik daar niet zo zeker van, want ik had naar mijn mening niet voldoende vraagstukkenroutine. De opgaven van vroegere examens kon ik wel oplossen maar ik had er m.i. teveel tijd voor nodig. Bovendien moest ik me voor het wiskunde-examen opgeven vóórdat ik de on-

derwijzersakte had. Dat was nu wel niet zo'n groot bezwaar, want de directeur wilde bij mijn aangifte wel verklaren dat ik voor het onderwijzersexamen stellig zou slagen, maar ik voelde het als een soort *verplichting* om dan voor de wiskunde-akte te slagen. Bovendien, de onderneming kostte geld en ik verdiende niets. Mijn ouders moesten dus betalen. Ze waren onbemiddeld en van het salaris dat mijn vader als ambtenaar genoot, konden ze wel rondkomen, maar eventuele extra uitgaven moesten wel erg nauwkeurig worden overwogen. En in dit geval ging het om een niet te verwaarlozen bedrag: examengeld, een aantal treinreizen van Groningen naar Den Haag en terug en enkele dagen logies in Den Haag. Dit alles heeft gemaakt dat ik dagenlang rondliep zonder tot een besluit te komen, zo lang zelfs dat ik de aanmeldingsdatum liet verstrijken. Toen raakte ik in paniek en ging ten einde raad naar een zeer bekende opleider voor wiskunde l.o., niet om lessen maar om advies. Hij raadde me aan examen te doen; dat mijn opgave iets te laat kwam, zou men mij, zo dacht hij, niet kwalijk nemen. Het eindresultaat was dat ik examen deed. De man bij wie ik te rade ging, was A. Lenstra, de stamvader van een paar generaties van Nederlandse wiskundigen, ònze familie Bernoulli, maar dan zonder ruzie. Over het examen zelf valt niet veel te melden. Het vond plaats in een gebouw in het centrum van de stad (Fluwelen Burgwal).
Goedkoop logies had ik gevonden in het HTO, het Haags Tehuis voor Ongehuwde mannen. Goede maaltijden, sober ingericht: de kamers waren zo groot als een cel in een van onze nieuwbouwgevangenissen. Het gebouw lag op de toenmalige grens van Den Haag en Rijswijk; een wandeling van een kleine drie kwartier naar de plaats van het examen.
Lezers die benieuwd zijn naar de examenopgaven, kan ik helaas niet volledig tevreden stellen: ik beschik nog slechts over de volgende twee stellen.

Planimetrie

1. In een cirkel (middelpunt O) is een driehoek ABC beschreven; $\angle C$ is scherp. M is het midden van AB, D dat van de kleinste boog AB. De rechte die met CM symmetrisch is ten opzichte van CD snijdt het verlengde van MD in S. Toon aan dat S het uitwendig gelijkvormigheidspunt is van de gegeven cirkel O en van de cirkel, die, met D als middelpunt, rakend aan AB kan worden beschreven. Als C zich langs boog AB beweegt, terwijl A en B vast blijven, vraagt men de m.p. van de projectie van O op CS.
2. In $\triangle ABC$ snijden de binnendeellijnen AA_1, BB_1 en CC_1 elkaar in N. Gevraagd wordt $\triangle ABC$ te construeren, als gegeven is het lijnstuk CC_1, de verhouding $AN : NA_1$ en de verhouding $BN : NB_1$.
3. Op een vaste cirkel worden twee vaste punten A en B gekozen, terwijl een punt C zich beweegt langs een der bogen AB. M is het midden van AB; D is het snijpunt van AB met de deellijn van $\angle C$.
Bepaal de m.p. van het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔMCD en ook die van het hoogtepunt van deze driehoek.

Driehoeksmeting

1. Los x op uit de vergelijking:
$$\sin^2 3x = \sin^2 x + \sin 4x \times \cos x \times \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}.$$
2. In driehoek ABC wordt de hoogtelijn CD verlengd, tot de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ in E gesneden wordt. Bewijs dat $\tan A \times \tan B = 2$, als $CD = \frac{2}{3}CE$.
Hoe groot wordt echter $\tan A \times \tan B$, indien het verlengde van DC de omgeschreven cirkel in E snijdt, ook weer zodanig, dat
$CD = \frac{2}{3}CE$?
Bereken in dit laatste geval de hoeken A en B, indien bovendien gegeven is: $\angle C = 40°$.
3. Men trekt in een cirkel een middellijn AB; vervolgens door A en door B koorden, die elkaar in C onder een scherpe hoek $\angle ACB = \beta$ snijden. AC snijdt de cirkel in D; BC snijdt de cirkel in E. Bereken de hoek die de koorde AC maakt met de middellijn AB opdat $BD + DE = 2BE$, indien $\beta = 60°$. Indien vervolgens AC draait om A (het snijpunt D kan daarbij op het verlengde van AC komen te liggen) en BC om B zodanig, dat $\angle\beta$ steeds 30° is, vraagt men het maximum oppervlak van $\triangle BDE$ te berekenen als de cirkel de straal R heeft.

► En de boer, hij ploegde voort

H. W. van Tilburg

Wie de moeite neemt, eerst het afsluitende 'Over de auteur...' aan het einde van dit artikel te bekijken, zal zich misschien met opgetrokken wenkbrauwen afvragen, wat zo'n oudgediende behalve wat nostalgische verhalen over het goede 'vroeger' nog voor nieuws te vertellen kan hebben. En inderdaad: verwacht geen hoogdravende nieuwe theorieën over denkniveaus en leertrappen en hoe deze in de lespraktijk hun neerslag moeten krijgen.
Anderzijds zal hieronder ook geen beschrijving op lesniveau te vinden zijn met een uitvoerige verklaring over de wijze hoe Pietje en Marietje tot hun Aha-Erlebnis kwamen. Het is de steeds meer tot ergernis groeiende verbazing van de laatste praktijkjaren die de aanleiding vormen tot deze regels, waarvoor nu de tijd vrij gekomen is. Maar ze zouden zeker nog achterwege gebleven zijn, als niet het sterke vermoeden aanwezig was, dat vele collega's dezelfde mening zijn toegedaan: moet er in een leerzaam omzien niet eens wat tegengas gegeven worden?

Want de boer, hij ploegt maar voort.
Al sinds geruime tijd worden we in alle mogelijke krante- en tijdschriftartikelen overgoten met de enthousiast opgeklopte saus van de nieuwe realistische wiskunde: een zelfontdekkende speurtocht vanuit het leven naar het leven, waaraan iedereen vol blijde en gespannen verwachting deelneemt. Zelfs het buitenland zou met grote jaloezie staan te popelen om samen mee op te trekken. Helaas moest ondergetekende constateren, dat op genoemde trektocht de deelnemers het spoor zeer snel bijster raakten en wederom helaas, dat ook grote groepen van collega's dezelfde ervaring opdeden. Want hoe anders is te verklaren de uitslag van de wiskunde-examens van 1988[1], zoals die ons op bladzijde 63 van Euclides 64-2 worden meegedeeld: wiskunde B 36% onvoldoenden (< 5,5), d.w.z. meer dan 1 op de 3!! Met als laconieke toevoeging dat van een redelijk resultaat gesproken kan worden. Volgens Posthumus is er al reden tot grote schaamte bij 25%; de moderne talen normeren constant naar een uitslag van 15 tot 20%, maar bij wiskunde B is 36% redelijk. De opgeplakte kwalificatie kan m.i. niet anders geduid worden dan als een zekere mate van bedrijfsblindheid tegen de achtergrond van de andere verstrekte uitslagen: wiskunde A 38% in zijn totaliteit en 54% (**vierenvijftig!!**), als men alleen de leerlingen bekijkt die uitsluitend wiskunde A als exact vak hebben gekozen. Cijfers die aan duidelijkheid niets te wensen over laten (of moet hier misschien bij vermeld worden, dat ze betrekking hebben op de resultaten **na** hernormering?).

Toch 2 opmerkingen die deze cijfers nog schrijnender maken:
Allereerst dan de wijze van correctie, waarvoor alleen vraagstuk 1 van 1988 zeer summier ter adstructie wordt opgevoerd; het hierna volgende betoog maakt het afdrukken van de opgave met de normen niet nodig. Onderdeel 5 was duidelijk een vraagstuk over lineair programmeren, waarvoor 7 punten konden worden toegekend. Er waren kandidaten die twee vergelijkingen noteerden met oplossing, d.w.z. geen ongelijkheden, geen definitiegebied, geen doelfunctie, geen niveau- of zoeklijnen, geen..., maar wel een honorering van 6 punten. Wanneer bovendien het gevonden snijpunt (5,5, 9) bij een volkomen onbegrijpelijke rekentechnisch gegoochel wordt betrokken kan verrassenderwijs p = 22,5 uit de toverdoos komen rollen: score 5!? Ondergetekende wil zich niet opwerpen als degene die dergelijke oplossingen exact tot op een decimaal nauwkeurig kan honoreren, noch wil hij een divergentie van normeermeningen blokke-

ren, maar hij wil wel een zodanige toekenning van 11 punten (of 6 na verfoeilijke middeling) mee laten wegen in de evaluatie van die 38 en 54%. Een tweede opmerking betreft vooral die 54%. Slaat dit nu juist niet op die leerlingen waarvoor speciaal wiskunde A is ingevoerd? Zij immers ambiëren geen exacte vervolgopleiding, maar wel enige toepassingsgerichte kennis. Is het overdreven te stellen, dat deze doelstelling volledig gemist wordt of valt dit ook onder de categorie 'redelijk'?



En de boer, hij ploegt maar voort.
Juist de inhoud en aanbiedingswijze van deze nieuwe wiskunde A worden als hoofdmotieven aangehaald om het verplicht te kunnen gaan stellen. En of dit nu voortkomt uit en gedragen wordt door een kamerbreed onderwijsveld of de hobby is van slechts één persoon, dat lijkt er niet veel toe te doen. In steeds meer beschouwingen en berekeningen wordt deze verplichting al min of meer als vaststaand beschouwd. Lijken deze berekeningen wat prematuur, eensdaags zullen onafwendbaar zowel in de onderbouw (basistabel) als in de bovenbouw (budgettair neutrale invoer van een 8e vak) wiskunde-uren aan de algehele vooruitgang opgeofferd gaan worden. Voorshands lijkt de opmerking dat daarom die 54% zelfs een **gunstige** uitschieter zal blijken te zijn, niet zo opmerkelijk als het op het eerste gezicht lijkt, hoewel natuurlijk een hernormering – zoals al zo vaak is geschied – altijd nog de voorgevel wat kan bijpleisteren.

En de boer, hij ploegt maar voort.
Ondanks al deze duidelijke signalen moeten zonodig toch nog beide vakken uitgebreid gaan worden: wiskunde A met een wisselend bijzonder onderwerp en wiskunde B met de onderwerpen kegels, cilinders en ruimtekrommen, en met een theorie over differentiaalvergelijkingen, een theorie die bij wiskunde I tot de grote tijdvretende onderwerpen behoorde en minstens weer een aanslag zal gaan plegen op de tijd, die... er nu al niet meer is en waarop binnen afzienbare tijd zelfs nog zal worden gekort.
Natuurlijk kan een ontwikkelcommissie niet het oor laten hangen naar elke kritiek van elke willekeurige leraar, maar wanneer de wiskundesecties van een tiental scholen vanuit de praktijk (N.B. Het gaat hier om een ervaring van 10 wiskundesecties uit West-Brabant, die samen het HEWET-team over een en ander benaderden.) op de overladenheid van de HEWET-voorstellen menen te moeten wijzen, dan verdient dit m.i. meer aandacht dan de ene tegenvraag of men misschien te lui is om te werken. Ook een heel HEWET-exposé in termen van figuurTJE, vlakJE, neerslagJE, hoekJE, loodlijnTJE en cirkelTJE kan dan wel een bagatelliserende uitwerking beogen, de praktijk wijst anders uit, te meer nu voortdurend tweesporig moet worden gewerkt: langs de lijnen van de synthetische meetkunde en van de meer analytisch gerichte vectorrekening.

De onverantwoord grote tijdvreter echter is naar de stellige overtuiging van ondergetekende de zeer sterk aangeprezen en toegepaste aanpak van zelfontdekking. 'Het is een hardnekkig misverstand, dat je iemand iets nieuws kunt leren door het uit te leggen.', zo was in een van de vorige Euclidesnummers te lezen (zie Euclides 63-9, bladzijde 253), terwijl daarnaast toch ook niet de eerste de beste in ditzelfde blad kon poneren, dat studenten te beklagen waren, als ze meenden een goede leraar te hebben gehad, wanneer die alles zo goed kon uitleggen. Blijkens Euclides 64-2, bladzijde 38 schijnen de

Van-der-Blij-studenten toch anders over deze 'magistrale' eigenschappen te denken.

Het is bovendien toch frappant om bij het omzien naar voorbije praktijkjaren te ontdekken, hoe steeds maar weer opnieuw het wiel uitgevonden wil worden.
In de 50-er jaren viel ondergetekende bij eerste aantreding meteen in de felle discussie rond de globaal-lees en schrijfmethodiek: geef de leerlingetjes meteen hele zinnen uit het volle (kinder)leven en laat de verdere differentiatie aan de natuurlijke ontwikkeling over. Helaas moesten eerst hele jaargangen verknoeid worden, voordat op de dwalingen werd teruggekomen.
De 60-er jaren aanschouwden de talenpraktica: weg met de grammaticaregels en idioom en samen weer als kleuters de natuurlijke weg op van het luisteren, band na band na band. Eigenlijk hadden de docenten die nog vasthielden aan de middeleeuwse wijze met dorre woordrijen en regels, meteen ontslagen moeten worden. Misschien zou het toch een aardig en leerzaam onderzoekje zijn om na te gaan, hoeveel praktica er nog intact zijn.
De 70-er jaren waren voor de fysica: geen kant en klare formuleringen meer, maar in een eindeloze reeks van proeven 'de natuur bevragen: wat zie je nu en dus . . .'. Inmiddels blijkt deze weg toch ook niet het beoogde succes te hebben opgeleverd.
En dan nu in de 80-er jaren met ons vak wiskunde langs ditzelfde platgetreden pad, dat elders al weer verlaten is: zelfontdekking in een alles overwoekerend oerwoud van praktijkvoorbeelden. En alles en iedereen moet mee. Leerboeken, wiskundeperiodieken, kranteartikelen wijzen eendrachtig en enthousiast dezelfde richting uit, zoals men trouwens in een voorgaande periode ook al het éinde ontdekt meende te hebben in de groepen van afbeeldingen met in- en surjecties en de allesverbindende tekst van de verzamelingenleer met haar zijsprongen naar logica en logische symbolen. Van dit laatste is weinig of niets meer over, terwijl het huidige paradijs geleid heeft tot bovengenoemde resultaten, die – en dat mag ook wel eens hardop benadrukt worden – slechts een momentopname zijn, maar wel veel blootleggen m.b.t. het moeizame geploeter in de bovenbouwjaren.

En de boer, hij ploegt maar voort, want ook de Hawex is in aantocht met een wiskunde, die . . . 'nog meer geënt zal zijn op alledaagse contexten en . . . ook bij de analyse van wiskunde B zal worden **uitgegaan** van contexten.' En is ook nu weer niet al vooraf te beluisteren geweest, dat het gehele programma een erg overladen indruk maakt? Nergens nog hoorde ik ook maar van een eerste aanzet tot verbetering van de 'redelijke' resultaten, nergens nog las ik van een evaluatie bij het vervolgonderwijs (blijkens mededelingen van oudleerlingen is men toch niet overal even enthousiast), of ook de havo moet deelachtig gemaakt worden aan de nieuwe zegeningen. Misschien mogen toch door iemand die vele jaren met het havo-volkje tussen 4 muren heeft opgesloten gezeten, twee zeer grote vraagtekens geplaatst worden bij deze aanpak en het beoogde eindresultaat. Want met 2 van dergelijke vakken (voorlopig nog even van de 6) kan men het heel gemakkelijk de nek omdraaien!

Tot slot

In KOLOM 1 van George Schoemaker, Euclides 63-9, bladzijde 276, lees ik de mij uit het hart gegrepen zinsneden '. . . geen koppelverkoop . . . (en) . . . een programma moet onderwijsbaar zijn.' en ook 'Leerlingen krijgen pas last, als docenten een niet bij hen passende onderwijsstijl wordt opgedrongen.' Dit artikel lijkt een pleidooi voor een terugzetten van de klok. Niets is minder waar, omdat de doorbraak van een brede toepasbaarheid in het wiskunde-onderwijs ook door ondergetekende als een te groot goed gewaardeerd wordt. De koppelverkoop dat dan ook meteen alles door de leerlingen zelf uit diezelfde praktijk moet worden gedistilleerd, is echter juist een brug te ver, omdat de toegemeten tijd daarvoor ten enen male ontoereikend is en zeker ook niet tot de stijl van elke docent zal behoren. De vraag of een gemiddelde (havo-)leerling dit ook inderdaad allemaal aan kan en niet in een Fellorance-syndroom (Zie Euclides 64-2, bladzijde 42) zal vervallen, wordt daarbij nog maar in het midden gelaten.

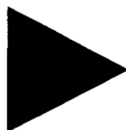
Ondergetekende was, is en zal van mening blijven, dat te veel wordt uitgegaan van de én-én-én-én-procedure:
- én de omvang in onderwerpen op het oude peil handhaven;
- én de praktijkproblemen behandelen, die zelfs als pure toepassing al ontzaglijk veel tijd vergen;
- én als het even kan (moet?) met de gehele schoolpopulatie (lees: met instroom van **alle** kneusjes op dit gebied);
- én als het even kan (moet?) ook nog in een geringer aantal lesuren en/of met grotere groepen.

Hopelijk zullen er vele collega's zijn, die zich zeer wel bevinden in de huidige programmeeromgeving. Mogelijk is bovendien het bovenstaande sterk ingekleurd met de penselen van de gebruikte methode, maar gezamenlijk moet men m.i. toch van mening zijn, dat genoemde resultaten een grondige herbezinning eisen. Resultaten die zo bedroevend zijn, dat nu niet meer volstaan kan worden met de tegenwerpingen, dat slechts van zichzelf oplossende aanloopproblemen gesproken kan worden of dat het om het wiskundig handelen gaat en niet om het papiertje. Want doorploegen op deze wijze en dat bij blijvende absentie van elk soort van bemesting zal ontegenzeglijk toch tot een steeds hogere graad van verzuring leiden.

Over de auteur:
H.W. van Tilburg, 1951-1956 basisonderwijs; 1956-1988 leraar natuurkunde, maar vooral wiskunde op ulo-kweekschool-vwo/havo; 1-8-1988 DOP-genieter.

Noot van de redactie

1 Het artikel van de heer Van Tilburg werd geschreven naar aanleiding van de publikatie van de resultaten van de examens van het jaar 1988. Inmiddels zijn de resultaten van 1989 bekend geworden (zie blz. 114 t/m 119 van dit nummer): voor wiskunde A in het vwo gemiddeld 5,7; kandidaten met wiskunde B hadden gemiddeld 6,91, kandidaten met natuurkunde maar zonder wiskunde B hadden gemiddeld 6,25 en kandidaten met noch wiskunde B, noch natuurkunde hadden gemiddeld 5,02; na bijstelling van de norm werd het gemiddelde van de totale populatie 6,0. Wij menen dat deze resultaten voldoende aanleiding vormen het artikel alsnog op te nemen.

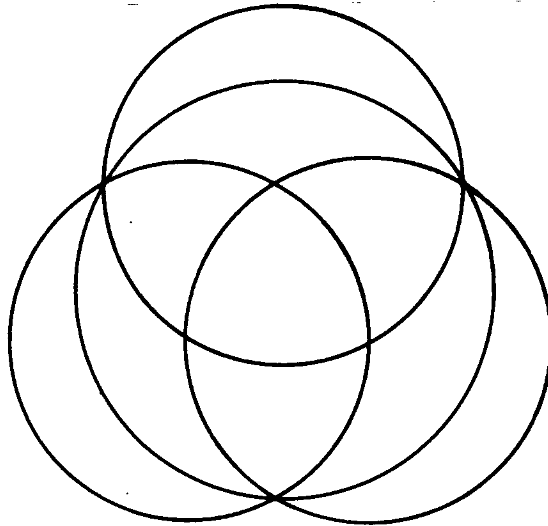


Boekbespreking

Lauwerier, H. A.: *Analyse met de Microcomputer*, *f*27,50, 153 blz. en
Lauwerier, H. A.: *Meetkunde met de microcomputer*, *f*32,50, 161 blz. uitg.: Epsilon

In de eerste bundel van deze uit twee delen bestaande serie ligt de nadruk vooral op het analyseren van functies en krommen. Daarbij wordt de microcomputer ingezet als tekeninstrument. Met behulp van in GW-BASIC geschreven kleine programma's worden grafieken en krommen op het beeldscherm afgebeeld. Hoewel enige aandacht aan het construeren van algoritmen moet worden besteed zijn de programmeertechnische problemen klein gehouden, zeker in verhouding tot het niveau van de gebruikte wiskunde, die op het niveau van bovenbouw vwo en het hbo ligt.
Na een hoofdstukje waarin alle te gebruiken statements worden beschreven wordt in hoofdstuk 2 (Coördinatenmeetkunde) het verband gelegd tussen het assenstelsel en het beeldscherm. De andere hoofdstukken behandelen steeds een bepaalde klasse van krommen:
3. cirkels en rechte lijnen; 4. grafieken van functies: 5. krommen en banen; 6. kegelsneden; 7. functies van twee variabelen.
Door in de tweede bundel het hoofdstuk Coördinatenmeetkunde nogmaals op te nemen kunnen de delen onafhankelijk van elkaar worden gebruikt.
In dit boek ligt het accent op het construeren van projecties van lichamen. Zowel de orthogonale-, de scheve parallel- als de centrale projectie worden beschreven. Bewegende beelden worden gemaakt als resultaat van series afbeeldingen in het platte vlak.
Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan problemen die het projecteren van gebogen vlakken oproept. In het laatste hoofdstuk worden twee-dimensionale projecties van vier-dimensionale objecten geconstrueerd. Een aantal hoofdstukken is voorzien van opgaven waarmee de gebruiker wordt uitgenodigd het geleerde in praktijk te brengen.
De schrijver laat ons zien dat de microcomputer een uiterst handig stuk gereedschap kan zijn bij het onderwijzen en leren van wiskunde.
Helaas zullen de meeste wiskundelokalen nog wel niet voldoen aan de in de inleiding beschreven inrichting: een aantal computers en een plotter. Wie echter deze boeken heeft gelezen zal de wenselijkheid van het continu beschikbaar hebben van dergelijke apparatuur zeker onderschrijven.

Harm Bakker

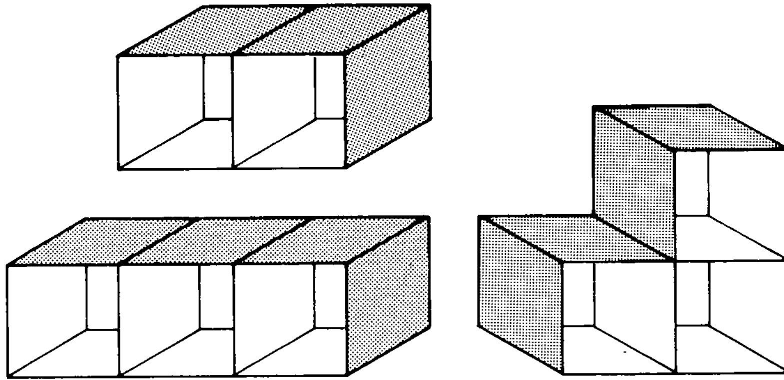


▶ Magische cirkels

In de tekening zijn vier cirkels te zien, die elkaar twee aan twee snijden, en wel zó, dat ze samen tien gebieden insluiten. Drie van de cirkels bevatten elk vijf gebieden en één cirkel bevat zeven gebieden.

Plaats nu de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 elk in één van de gebieden, zó dat de som van de getallen in elke cirkel dezelfde is.

Fun with mathematics, no. 46 (1981)
c/o Mary Stager, Ontario, Canada



► Kubussen tegen elkaar

Als we twee gelijke kubussen tegen elkaar plaatsen, zó dat twee zijvlakken helemaal tegen elkaar passen, dan ontstaat telkens hetzelfde bouwsel.
Als we dit doen met drie kubussen, dan zijn er twee verschillende mogelijkheden. De tekening laat dit alles zien.

Als we vier kubussen tegen elkaar plaatsen, dan zijn er veel meer mogelijkheden. Onderzoek welke mogelijkheden er zijn; teken ze, of maak ze zelf door zelfgemaakte kartonnen kubussen aan elkaar te plakken (je moet in dat geval wel heel wat kubussen maken!).
Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Fun with mathematics, nr. 46
c/o Mary Stager, Ontario, Canada

▶ Eindexamens vwo en havo eerste tijdvak 1989

H. N. Schuring, C. Lagerwaard, W. Kleijne en J. W. Maassen

Inleiding

In dit artikel vindt men allerlei wetenswaardigheden omtrent deze examens. Eerst komen de resultaten aan de orde aan de hand van de steekproefgegevens die het CITO verzameld heeft (H. N. Schuring en drs. C. Lagerwaard), vervolgens de vaststelling van de cesuur door de CEVO met behulp van deze steekproefgegevens (drs. W. Kleijne) en tenslotte de meningen van de docenten in een verslag van de regionale besprekingen van deze examens, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (drs. J. W. Maassen).
Extra aandacht is besteed aan de nieuwe havo examens van het HAWEX experiment; wiskunde HA en wiskunde HB.

De resultaten van de examens

Het geven van een overzicht van de resultaten van deze examens is slechts mogelijk dankzij de medewerking van de betrokken docenten die de gegevens van vijf kandidaten (voor HAWEX alle kandidaten) van hun school tijdig hebben opgestuurd.
In de gegevens van de steekproeven komen enige uitdrukkingen en cijfers voor, waarvan de betekenis hieronder uitgelegd wordt:
– de p'-waarde van een vraag is de gemiddelde score van de vraag uitgedrukt in procenten van de maximum score van die vraag;
– de RIT is een maat voor de correlatie tussen een vraag en de totale toets; een hoge RIT geeft aan dat de vraag goed discrimineert, d.w.z. 'goede' kandidaten maken de vraag goed en 'slechte' kandidaten maken de vraag slecht;
– de RIR is een analoge maat voor de correlatie tussen een vraag en de rest van de toets, waarin deze vraag niet meegerekend wordt.

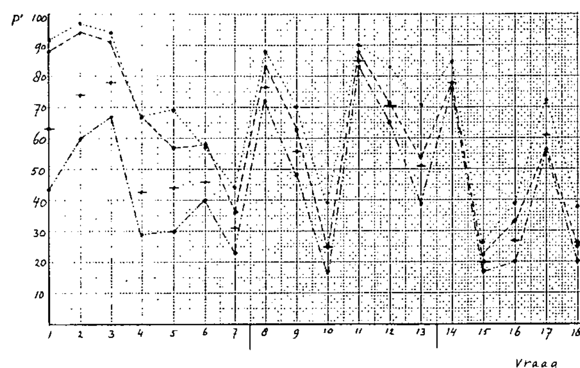
Vwo wiskunde A

Op grond van de resultaten van 2150 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen:

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'waarde	RIT	RIR
1	3	1,9	63	0,56	0,49
2	3	2,2	74	0,54	0,49
3	5	3,9	78	0,54	0,47
4	2	0,9	43	0,50	0,46
5	3	1,3	44	0,52	0,45
6	8	3,6	46	0,51	0,35
7	7	2,2	31	0,55	0,41
8	11	8,5	77	0,53	0,36
9	3	1,7	56	0,48	0,42
10	3	0,7	25	0,50	0,44
11	3	2,6	85	0,34	0,29
12	3	2,1	71	0,39	0,33
13	7	3,5	51	0,59	0,46
14	4	3,1	78	0,32	0,27
15	6	1,2	20	0,38	0,29
16	7	1,9	27	0,50	0,36
17	7	4,3	61	0,49	0,35
18	5	1,3	26	0,44	0,34

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 57,0 met een standaarddeviatie van 16,4.
De vragen 7, 10, 15, 16 en 18 hebben een lage score ($p' < 40\%$), waarbij meer dan 50% van de kandidaten ten hoogste 1 punt scoorde. In vraag 7 moesten de relevante gegevens uit een matrix gehaald wor-

den, waarna met elementair rekenen de vraag beantwoord kon worden in de context. Vraag 10 was een uitbreiding in een lineair-programmeringsprobleem. In vraag 15 moest een kansverdeling berekend worden met de hypergeometrische verdeling, terwijl de vragen 16 en 18 betrekking hebben op een nieuwe ondervragingstechniek, de 'randomized response'-techniek, waarbij het berekenen van de verwachting tot een juiste oplossing kan voeren.
Van 1655 kandidaten uit de steekproef zijn gegevens bekend over hun vakkenpakket:
501 kandidaten hebben ook wiskunde B examen gedaan,
146 geen wiskunde B, maar wel natuurkunde en
1008 geen wiskunde B en ook geen natuurkunde.
De gemiddelde scores van deze deelpopulaties zijn achtereenvolgens; 69,1; 62,5 en 50,2.
De p'-waarden per vraag in deze deelpopulaties zijn in de volgende figuur weergegeven.



.... p'-waarde deelpopulatie met wiskunde B
--------- p'-waarde deelpopulatie zonder wiskunde B, maar wel natuurkunde
_._._._. p'-waarde deelpopulatie zonder wiskunde B, zonder natuurkunde
-+- p'-waarde totale steekproef

Uit deze figuur blijkt dat de eerste twee deelpopulaties in opgave 1 (vraag 1 – vraag 7) aanzienlijk hoger scoren dan de derde deelpopulatie, in de opgaven 2 en 3 is dit in veel mindere mate het geval. Dit is niet verwonderlijk, want de leerstof voor opgave 1 is onderdeel van het curriculum van zowel wiskunde A als wiskunde B.

De samenstellers van het examen hebben een jaar geleden een schatting gemaakt van de moeilijkheidsgraad van dit examen door de p'-waarde van elke vraag te schatten in klassen met een breedte van 20%. De gemiddelde schatting van de gemiddelde score was voor de gehele populatie 60,9; 3,9 scorepunt hoger dan de werkelijke waarde. Voor de deelpopulatie zonder wiskunde B en zonder natuurkunde was de schatting 52,1; 1,9 scorepunt hoger dan de werkelijke waarde.

Vwo wiskunde B

Op grond van de resultaten van 2074 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen:

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'waarde	RIT	RIR
1	8	7,6	95	0,29	0,23
2	8	3,0	37	0,49	0,30
3	6	3,9	65	0,46	0,33
4	6	3,3	54	0,52	0,41
5	8	2,6	32	0,53	0,40
6	8	4,2	52	0,53	0,38
7	2	1,6	80	0,41	0,36
8	3	2,7	90	0,38	0,34
9	3	2,5	83	0,30	0,25
10	3	2,3	77	0,46	0,40
11	6	2,4	39	0,60	0,47
12	6	0,5	9	0,52	0,44
13	5	2,1	41	0,51	0,38
14	6	5,3	89	0,38	0,27
15	6	4,3	71	0,46	0,31
16	6	2,9	48	0,58	0,45

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 61,0 met een standaarddeviatie van 14,1.
De vragen 2, 5, 11 en 12 hebben een lage score ($p' < 40\%$), terwijl bij vraag 2, 12 en 13 meer dan 50% ten hoogste 1 punt scoorde. In vraag 2 moest een raaklijn door de oorsprong opgespoord worden, wat door veel kandidaten niet onderkend werd. In vraag 12 moest aangetoond worden dat de middens van verticale lijnstukken uit vraag 11, ook middens van horizontale lijnstukken zijn.

Ook voor dit examen hebben de samenstellers vooraf de gemiddelde score geschat. De gemiddelde schatting was 60,0, wat 1 scorepunt lager is dan het werkelijke gemiddelde.

Ongeveer 87% van alle vwo-kandidaten heeft examen gedaan in wiskunde; 41% alleen in wiskunde A, 28% alleen in wiskunde B en 18% zowel in wiskunde A als in wiskunde B. Vorig jaar waren deze percentages respectievelijk: 85, 39, 28 en 18.

Havo wiskunde

Op grond van de resultaten van 2354 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen:

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'waarde	RIT	RIR
1	6	4,6	77	0,54	0,45
2	5	3,8	77	0,50	0,41
3	7	3,4	49	0,64	0,52
4	2	1,5	75	0,15	0,10
5	6	4,7	79	0,31	0,21
6	4	2,9	71	0,38	0,29
7	6	3,6	60	0,44	0,30
8	4	3,4	85	0,44	0,38
9	3	2,2	73	0,32	0,27
10	6	3,0	49	0,67	0,58
11	5	0,8	15	0,49	0,41
12	6	4,1	68	0,50	0,41
13	6	1,7	28	0,59	0,49
14	6	1,1	18	0,49	0,38
15	4	1,7	42	0,59	0,53
16	4	2,5	62	0,53	0,47
17	5	1,8	35	0,63	0,55
18	5	1,7	34	0,59	0,50

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 58,3; met een standaarddeviatie van 15,3.
De vragen 11, 13, 14, 17 en 18 hebben een lage p'-waarde ($p' < 40\%$), terwijl, behalve in vraag 17, meer dan 50% van de kandidaten ten hoogste 1 punt scoorde. In vraag 11 moest de maximale lengte van een lijnstuk bij een wortelfunctie bepaald worden, terwijl in vraag 13 een vergelijking opgesteld moest worden van een raakcirkel aan een parabool, met middelpunt op de symmetrie-as en in vraag 14 het beeld van de parabool na translatie door de oorsprong moest gaan. De vragen 17 en 18 hebben betrekking op goniometrische functies.
De samenstellers van dit examen hebben ook vooraf de gemiddelde score geschat. De gemiddelde schatting is 58,9; dit is 0,6 scorepunt hoger dan het werkelijk gemiddelde.

Het Hawex experiment

In het kader van het HAWEX experiment, gestart in 1987 in het vierde leerjaar van drie scholen, werden dit jaar voor het eerst examens afgenomen voor de nieuwe programma's wiskunde HA en wiskunde HB voor havo.
Leerlingen die in het vigerende programma wiskunde zouden hebben gekozen, deden nu examen in wiskunde HB. De overige leerlingen konden als examenvak wiskunde HA kiezen, met dien verstande dat slechts één groep per school gevormd mocht worden.
Onder verantwoordelijkheid van de CEVO zijn de opgaven van het cse ontworpen door het ontwikkelteam van het HAWEX experiment, in samenwerking met de adviescommissie van docenten (ACD). Hierdoor was aansluiting bij de gebruikte leerstofpakketjes en de gevolgde didactiek goed mogelijk. Bij de vaststelling van de examenopgaven was nog niet precies bekend hoe de leerstof van de laatste maanden verwerkt zou worden.
De examenopgaven zijn gepubliceerd in Euclides jrg. 65 nr. 1.
Omdat slechts weinig kandidaten aan deze examens deelgenomen hebben, zijn de resultaten van alle kandidaten verwerkt in onderstaande overzichten.

Havo wiskunde HA

Op grond van de resultaten van 56 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen:

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'waarde	RIT	RIR
1	8	5,0	62	0,69	0,54
2	3	2,8	93	0,25	0,20
3	2	1,9	95	0,25	0,22
4	2	1,8	91	0,17	0,13
5	2	2,0	98	-0,05	-0,07
6	2	1,2	61	0,43	0,37
7	6	5,0	83	0,69	0,64
8	4	3,5	88	0,30	0,23
9	6	3,4	56	0,59	0,45
10	7	6,4	92	0,53	0,44
11	5	4,1	82	0,47	0,36
12	4	3,2	80	0,71	0,65
13	4	1,5	38	0,54	0,43
14	2	1,7	84	0,46	0,42
15	1	0,9	89	-0,04	-0,07
16	2	1,8	91	0,09	0,05
17	4	3,0	76	0,52	0,46
18	2	1,8	88	0,27	0,23
19	4	2,3	57	0,54	0,46
20	4	2,4	60	0,52	0,43
21	6	5,4	90	0,28	0,18
22	5	3,8	76	0,40	0,29
23	5	1,2	25	0,33	0,20

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 76,1; met een standaarddeviatie van 12,9.
De vragen 13 en 23 hebben een p'-waarde kleiner dan 40%, terwijl meer dan 60% van de kandidaten voor deze vragen 0 of 1 punt scoorde. Daarentegen is de p'-waarde van meer dan de helft van de vragen groter dan 80.

Havo wiskunde HB

Op grond van de resultaten van 125 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen (zie de tabel):
De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 60,1; met een standaarddeviatie van 16,3.
De vragen 3 en 16 hebben een p'-waarde kleiner dan 40%, terwijl voor de vragen 6, 15 en 16 meer dan 50% van de kandidaten ten hoogste 1 punt gescoord heeft.

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'waarde	RIT	RIR
1	7	4,4	63	0,55	0,42
2	5	3,5	71	0,47	0,38
3	6	1,9	31	0,25	0,14
4	6	4,8	79	0,44	0,35
5	6	3,6	60	0,58	0,47
6	6	2,4	40	0,39	0,24
7	8	5,2	65	0,61	0,48
8	6	3,4	57	0,57	0,46
9	4	2,0	51	0,48	0,41
10	6	3,6	60	0,45	0,33
11	6	3,7	62	0,49	0,36
12	6	2,5	42	0,51	0,41
13	5	3,9	77	0,62	0,55
14	5	2,3	46	0,48	0,38
15	4	1,7	42	0,50	0,42
16	4	1,2	29	0,47	0,38

In vraag 3 moesten de mogelijke aantallen gemeenschappelijke punten van een lijn met gegeven richting en een sinusoïde gevonden worden; terwijl in vraag 6 de hellingshoek in een diagonaalvlak van een lichtboei gevonden moest worden.
In de vragen 15 en 16 moest een formule met een quotiënt onder een logaritme geïnterpreteerd worden.

De vaststelling van de cesuur

Bij de vergadering van de CEVO-vaksectie wiskunde vwo/havo waren de steekproefgegevens aanwezig die het CITO berekend heeft. Deze berekening heeft plaatsgevonden op grond van de gegevens van 5 kandidaten per school voor de examens havo en vwo A en B. Voor de berekening van de gegevens voor de experimentele havo wiskunde HA en HB examens is uitgegaan van de resultaten van alle kandidaten wegens het geringe aantal scholen (3). Ook waren aanwezig de verslagen van de regionale besprekingen voor zover deze tijdig naar het bestuur van de NVvW waren gezonden.

Uit de gegevens kwam naar voren dat men in zeer ruime mate tevreden was over het niveau en het

karakter van het examen vwo wiskunde A. Tevens werd naar voren gebracht dat de omvang van het werk, mede door vrij grote stukken te lezen tekst, wellicht (te) groot zou zijn. Gevoegd bij het feit dat vele docenten in hun lessen misschien nog niet volledig conform deze, bedoelde, nieuwe opzet hebben gewerkt, werd in deze punten reden gezien de cesuur vast te stellen bij 51/52.
De opmerkingen over de andere examens waren van zodanige aard dat de cesuur vastgesteld kon worden op 54/55.

Overzicht van de resultaten op grond van de steekproefgegevens:

	VWO		HAVO	exp	HAVO
	wi A	wi B		HA	HB
% onvoldoende	37	33	40	7	36
cesuur	51/52	54/55	54/55	54/55	54/55
gemiddeld cijfer	6,0	6,1	5,8	7,6	6,0

▶ Regionale besprekingen wiskunde vwo en havo 1989

Traditiegetrouw organiseerde de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook in 1989 regionale besprekingen voor het examen wiskunde. Bijna 300 docenten bezochten de wiskunde A besprekingen die gehouden werden op 10 plaatsen; de bijeenkomsten voor wiskunde B en wiskunde havo, die beide op 6 plaatsen werden gehouden, trokken elk een kleine 100 docenten.
Evenals vorige jaren werden op de bijeenkomsten aan het begin enige vragen over het examen gesteld. Dit leidde tot de volgende resultaten.

	wiskunde A-vwo	wiskunde B-vwo	wiskunde havo
In vergelijking tot vorig jaar is het niveau van het CSE 1989			
lager	2%	8%	54%
gelijk	36%	64%	56%
hoger	62%	28%	0%
De spreiding over de stof is			
slecht	47%	7%	0%
voldoende	45%	84	34%
goed	8%	9%	66%
Het aantal routinevragen is			
te klein	75%	1%	0%
goed	25%	87%	93%
te groot	0%	12%	7%
Het aantal originele opgaven is			
te klein	1%	16%	22%
goed	62%	67%	78%
te groot	37%	17%	0%
Het correctievoorschrift is			
te gedetailleerd	1%	0%	0%
goed	93%	100%	95%
te weinig gedet.	6%	0%	5%
De poging om de opgaven naar opklimmende moeilijkheidsgraad te rangschikken is			
niet gelukt	85%	69%	12%
redelijk gelukt	14%	30%	60%
goed gelukt	1%	1%	28%
De leesbaarheid van de vraagstukken is in het algemeen			
slecht	48%	1%	0%
voldoende	43%	51%	23%
goed	9%	48%	77%
De omvang van het CSE 1989 was			
te gering	0%	0%	3%
goed	43%	95%	88%
te veel	57%	5%	9%

De percentages zijn berekend over het aantal aanwezigen dat een keuze deed.
Van bijna alle bijeenkomsten zijn verslagen gemaakt waarvan een kopie aan de CEVO is gezonden met het verzoek de gemaakte opmerkingen te gebruiken bij het opstellen van de examens voor de volgende jaren.
In dit artikel worden slechts de belangrijkste punten uit de verslagen samengevat.

Algemeen

Het samenvallen van de besprekingen wiskunde A en wiskunde havo werd door velen erg betreurd.
De nieuwe lay-out met enkelvoudige vragen brengt met zich mee dat het aantal punten dat per vraag behaald kan worden zeer verschillend kan zijn.
Velen vragen daarom de maximale score per vraag op het werk te vermelden opdat de kandidaten hieruit de omvang van de vraag kunnen afleiden en daarmee rekening kunnen houden bij een indeling van de examentijd.
Anderen zijn juist tegenstander van het vermelden van deze maximale score omdat het gevaar er in zit dat leerlingen naar een van tevoren bedachte score toe gaan werken.
Gezien de vele correctie die door docenten wiskunde moet worden verricht, verzoekt men de examens wiskunde A en wiskunde B ver uit elkaar in het rooster te plaatsen en reeds vroeg in de examenperiode examens wiskunde te plaatsen.
In een van de besprekingen vroeg men aandacht voor de kandidaten van het volwassenenonderwijs. Dezen komen heel vaak in tijdproblemen omdat zij de vragen veel vollediger beantwoorden dan de leerlingen van de dagscholen.
In een van de groepen vroeg men om een artikel in Euclides waarin het standpunt van de NVvW is geformuleerd betreffende de rol en het samenspel van eerste en tweede corrector.

Wiskunde A

Zowel de omvang van het werk als de lengte van de teksten in de vraagstukken hebben een nadelige invloed op de behaalde resultaten gehad. Door de gebruikte leerboeken zijn de leerlingen niet op dit soort vraagstukken voorbereid. In een van de gespreksgroepen stelde men ook voor de concepten van de eindexamens te laten lezen door een docent die ervaring heeft met anderstaligen, zodat een opeenstapeling van wat ouderwetse woorden wordt voorkomen. Anderstaligen hebben moeite met de Nederlandse taal en grote hoeveelheden gegevens in lange stukken tekst vormen voor hen een bijna onoverkomelijke hindernis.
Het examen werd door velen positief tot zeer positief beoordeeld, vooral omdat de nadruk van het examen wat minder op aangeleerde technieken en wat meer op mathematiseren berust. Sommigen hadden echter iets meer standaardwerk op prijs gesteld.
Opgave 1 werd door velen afgewezen als een eerste opgave. Vooral voor A-leerlingen vond men het geen goede start.
Een lineair programmeringsvraagstuk ziet men graag in enige vragen gesplitst.
In opgave 2 werkte het gebruik van 'arbeidstijd' en 'beschikbaar aantal uren' verwarrend.
De normen van opgave 3 riepen de vraag op of het nog wel zinnig is in de les veel tijd aan de continuïteitscorrectie te besteden[1].
In een van de groepen heeft men een standpunt bepaald over vragen als onderdeel 18.
35% is van oordeel dat dit soort vragen gesteld moet worden, 40% meent dat dit soort vragen eigenlijk gesteld moet worden, maar gezien de problemen met corrigeren toch niet gesteld moet worden; 25% vond dat dit soort vragen niet op een examen thuis hoort.

Wiskunde B

De vraag is gesteld of het ruimtemeetkundevraagstuk altijd als laatste geplaatst gaat worden. Als naar de moeilijkheidsgraad gekeken wordt, had men een andere volgorde gewenst.

Wiskunde havo

De op de regionale bijeenkomsten geuite kritiek betrof alleen details.

Noot

1. Voor de toepassing van de continuïteitscorrectie wordt verwezen naar Euclides, jaargang 62, nr. 5, pag. 136.
Hier staat:
Als vuistregel kan worden aangehouden dat de continuïteitscorrectie moet worden toegepast indien sprake is van een indeling in klassen of bij een benadering van de binomiale verdeling door de normale verdeling.
Bij de binomiale verdeling is de vraag of de continuïteitscorrectie moet worden toegepast zowel afhankelijk van n als van p. Het is het eenvoudigst de correctie altijd toe te passen.

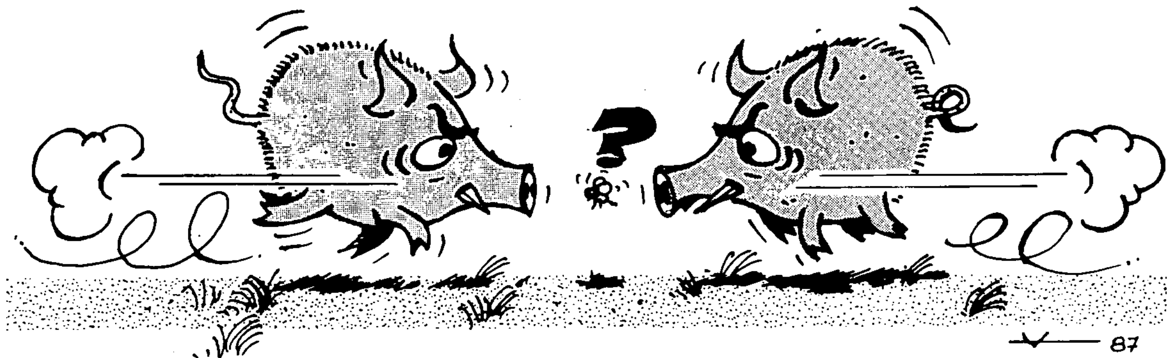
● Serie ● ● ● ● ●

'Wiskundeonderwijs in Vlaanderen'

▶ Rijen en reeksen in het zesde jaar[1,2]

Michel Roelens

tracht te geven. Het onderwerp 'rijen en reeksen' staat op het leerplan analyse van het zesde jaar (leerlingen van 17-18 jaar) in de sterk-wiskundige richtingen. Ik behandel dit onderwerp vòòr de invoering van de exponentiële en logaritmische functies en van het begrip integraal.
Bij deze begrippen kan ik de kennis over rijen goed gebruiken. Eigenlijk zouden de rijen en reeksen heel wat vroeger dan in het zesde jaar aan bod mogen komen: de kennismaking met 'oneindig' en met 'limieten' zou veel eenvoudiger en spontaner gebeuren dan zoals het nu in Vlaanderen het geval is (met name bij limieten van functies). Hoe dan ook, mijn leerlingen komen in het zesde jaar met een zekere technische behendigheid in limietberekeningen, maar met een volgens mij te beperkte 'oneindigheidsintuïtie'. Hieraan tracht ik wat te verhelpen door een intuïtief begin van het hoofdstuk 'rijen en reeksen', een soort 'spoedcursus in oneindigheidsintuïtie' met o.a. everzwijn op het menu.



Figuur 1

Twee everzwijnen lopen recht naar elkaar toe met een snelheid van 50 km/h. De beginafstand tussen beide evers is 100 km. Een (sport)vlieg vertrekt op hetzelfde ogenblik als de evers met een snelheid van 100 km/h vanaf de snuit van de eerste ever in de richting van de tweede. Daar aangekomen keert ze terug naar de eerste ever, enzovoort. Welke afstand legt de vlieg af vòòr ze wordt verpletterd?

Misschien is de versie met treinen i.p.v. everzwijnen u meer bekend. Het is één van de problemen waarmee ik aan het convergentiebegrip een intuïtieve basis

De leerlingen volgen in gedachten de vlieg. Als deze bij de tweede ever komt, heeft ze twee keer zoveel afstand afgelegd als deze ever. De tweede ever heeft dus één derde van de totale afstand van 100 km afgelegd. Ondertussen is ook het eerste zwijn even ver vooruit gekomen. En zo gaat het verder. Met een kleine schets ter ondersteuning vinden enkele leerlingen dat de vlieg

$$\frac{2}{3} \cdot 100 \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots) \text{ km}$$

aflegt.

'Kan de vlieg ooit oneindig veel afstandjes afgelegd krijgen?'
Er volgt een korte discussie onder de zeven leerlingen. Er komt b.v. aan het licht dat de vlieg onmogelijk telkens rechtsomkeert kan maken en toch een constante snelheid aanhouden. Ik wijs hen erop dat het hele verhaal niet zo realistisch is; we werken in een wiskundig 'model' dat niet helemaal overeenkomt met de fysica. Fundamenteler is de vraag: kunnen oneindig veel tijdsintervallen samen een eindig tijdsinterval vormen? Ik vestig de aandacht van de leerlingen op de everzwijnen: ze leggen 50 km af aan 50 km/h, dus duurt dit één uur. Hiermee kunnen we de afgelegde afstand van de vlieg zonder 'oneindige som' berekenen:

$100\,\text{km/h} \cdot 1\,\text{h} = 100\,\text{km}.$

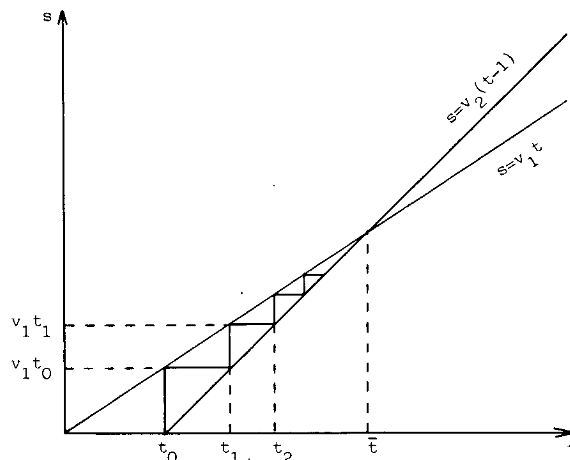
Hieruit wordt dan afgeleid dat

$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n = \frac{3}{2}.$

Een ander probleem dat ik in de klas behandel – en waarmee ik tot het algemene geval van de meetkundige reeks doorstoot – is de gekende 'paradox van Zeno' over Achilles en de schildpad (in een lichtjes gewijzigde versie).

Achilles en de schildpad nemen het tegen elkaar op in een loopwedstrijd. Achilles laat de schildpad één uur vroeger vertrekken. Zeno redeneert als volgt: 'Achilles haalt de schildpad nooit in, ook al loopt hij sneller. Eerst moet hij immers lopen tot waar de schildpad na dat uur geraakt is. Maar op het ogenblik dat Achilles daar aankomt, heeft de schildpad weer een stuk weg afgelegd. Achilles moet dus eerst dat stuk overbruggen, maar ondertussen is de schildpad weer verder, enzovoort.' Heeft Zeno gelijk en helpt het dus niet om vlugger te lopen?

Na het probleem met de vlieg laten de leerlingen zich niet zomaar door Zeno overtuigen. Wel vinden ze het moeilijk om precies te formuleren wat er mis is. Het is verwarrend: de uitleg van Zeno eindigt inderdaad niet (tenzij met 'enzovoort'), maar de inhaalbeweging van Achilles wel! Net zoals bij de vlieg kan de tijd die Achilles erover doet om de schildpad in te halen, enerzijds uitgedrukt worden als een reeks (zoals door Zeno wordt gesuggereerd) en anderzijds rechtstreeks berekend worden (eenparige bewegingen). We noemen de snelheid van de schildpad v_1 en deze van Achilles v_2.



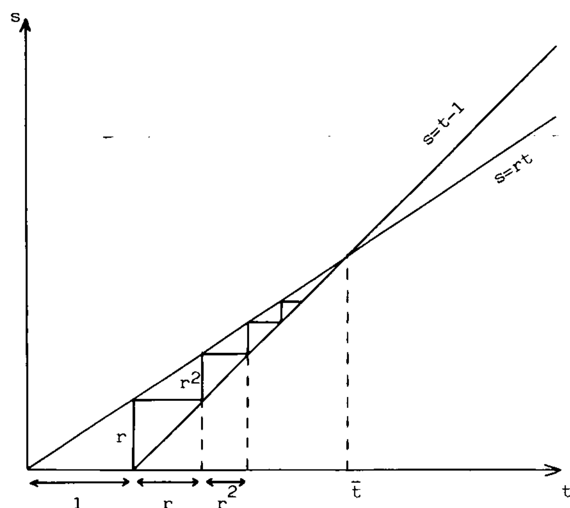
Figuur 2

Een korte berekening op basis van figuur 2 levert:
$t_0 = 1,$
$t_1 = 1 + r,$
$t_2 = 1 + r + r^2,$
$\ldots,$
en dus $\bar{t} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots,$
waarbij r staat voor v_1/v_2 (zodat dus $r < 1$). Anderzijds berekent men $\bar{t}$ als abscis van het snijpunt van beide rechten en dit geeft:

$$\bar{t} = \frac{v_2}{v_2 - v_1} = \frac{1}{1 - r}.$$

Dit 'meetkundig bewijs' van de formule voor de som van een meetkundige reeks met reden in $]0, 1[$ wordt nog overzichtelijker als we de snelheid van Achilles als eenheid van snelheid nemen (zie figuur 3).

Een zelfde meetkundig argument gebruik ik ook voor andere waarden van r. Voor $r \in]-1, 0[$ en voor $r \leq -1$ laat ik dan de interpretatie in het Achilles-schildpadmodel varen, maar herhaal ik wel de grafische idee.



Figuur 3

Een dergelijke manier van werken, waarbij de redenering binnen een concreet model (Achilles en de schildpad) gevoerd wordt, is in het Vlaamse wiskundeonderwijs – zeker in de wiskundige richtingen – niet zo gebruikelijk. De formeel-deductieve en algebraïsch-structurele tendens van de 'moderne wiskunde' heeft veel feller dan in Nederland de schoolwiskunde van de jaren '70 bepaald. Tegenwoordig stel ik vast dat hierop voor een deel wordt teruggekomen. Dit is eerst gebeurd in de richtingen met weinig uren wiskunde, waar de deductieve theorie duidelijk niet haalbaar bleek te zijn. Ook in de wiskundige richtingen leggen de nieuwe leerplannen, die sinds vorig schooljaar in het zesde jaar van kracht zijn, meer nadruk op concrete 'voorstelbare' aspecten en op toepassingen buiten de wiskunde. Mijn leerlingen die acht uur wiskunde per week kiezen, zijn vrij bedreven in het begrijpen en memoriseren van (gedoceerde) leerstof. Zij hebben echter heel wat moeite met het mathematiseren van concrete problemen (wat normaal is want ze hebben het niet geleerd), maar ook met het zelf opzetten van logische redeneringen! Zij denken er b.v. niet aan dat er een tegenvoorbeeld moet gezocht worden om aan te tonen dat een implicatie niet geldt, weten niet waar dit tegenvoorbeeld wel en niet aan moet voldoen... Deze moeilijkheden met het logisch redeneren zijn wel verbazend als je bedenkt hoeveel logische redeneringen ze reeds hebben bestudeerd. Mijn vermoeden is dat ze de leerstof op het abstractieniveau van de 'moderne wiskunde' wel kunnen begrijpen (en soms ook appreciëren), maar dat ze op deze stevig gefundeerde maar 'kale' rots te weinig concreet houvast en herkenning hebben om er zèlf iets creatiefs te doen. Abstractie moet (zeker in deze wiskundige richtingen), maar dan gestoeld op concrete modellen en voorstellingen zodanig dat het 'gezond verstand' en het formele denken elkaar wederzijds kunnen bevruchten...

Na een tweetal lessen waarin ook de rekenkundige en harmonische rijen en reeksen op een concrete manier aan bod komen, worden de bevindingen in verband met de meetkundige rijen en reeksen opnieuw geïnvesteerd in een ietwat spectaculaire 'pingpongbal-les' (die ik in aangepaste versie op de opendeurdag van de school zal hernemen).
Ik laat een pingpongbal één meter boven de tafel los. De leerlingen kijken en luisteren naar de opeenvolgende botsingen met de tafel; de 'laatste' zijn van elkaar niet meer te onderscheiden. De leerlingen herhalen het experiment en met een bordlat meten ze de opeenvolgende hoogten. Bij benadering neemt de hoogte bij elke botsing af met de factor 0,7. We spreken dan ook af om vanaf nu binnen dit wiskundig model te werken. Binnen het model zijn er oneindig veel botsingen, terwijl het in de werkelijkheid helemaal niet zo duidelijk is of er nog van botsingen sprake is wanneer de hoogte de grootteorde van het atoom benadert. We berekenen dan samen welke afstand de bal aflegt vòòr hij stil valt:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(0{,}7)^n - 1 = 2\frac{1}{1-0{,}7} - 1 = \frac{17}{3}\ \text{(meter)}.$$

Om de totale tijd te berekenen vòòr het balletje stil ligt, moet ik eerst wat fysica in herinnering brengen. De tijd nodig om vanaf een hoogte h te vallen, vind je door

$$h = \frac{g\,t^2}{2} \qquad (g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2)$$

op te lossen naar t. Ook duurt het precies even lang om tot op dezelfde hoogte terug te botsen. Uiteindelijk vinden we voor de totale tijd:

$$2\left(\frac{2}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(0,7)^{\frac{n}{2}}-\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{2}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-(0,7)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\right)\approx$$
$\approx$ 5,08 (seconden).

Ik vraag ook naar de grafiek van de hoogte als functie van de tijd: een hele uitdaging waarvoor sommige leerlingen de computer inzetten. De toppen van de parabolen liggen zelf op een 'grotere' parabool; ik laat het bewijs aan de lezer over (figuur 4).

Na de 'spoedcursus in oneindigheidsintuïtie' volgt het meer wiskundige luik met de definitie van de rijen en reeksen zelf en van 'convergentie'. Ik laat de leerlingen de 'algemene term' opschrijven van rijen zoals b.v.

$1, \frac{7}{4}, \frac{17}{9}, \frac{31}{16}, \frac{49}{25}, \ldots$

Als ik vervolgens vraag naar de limiet van de rij, vatten de leerlingen spontaan de algemene term als het voorschrift van een functie op en passen ze de rekenregels voor limieten van functies toe: zij schrijven

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2}=2$$

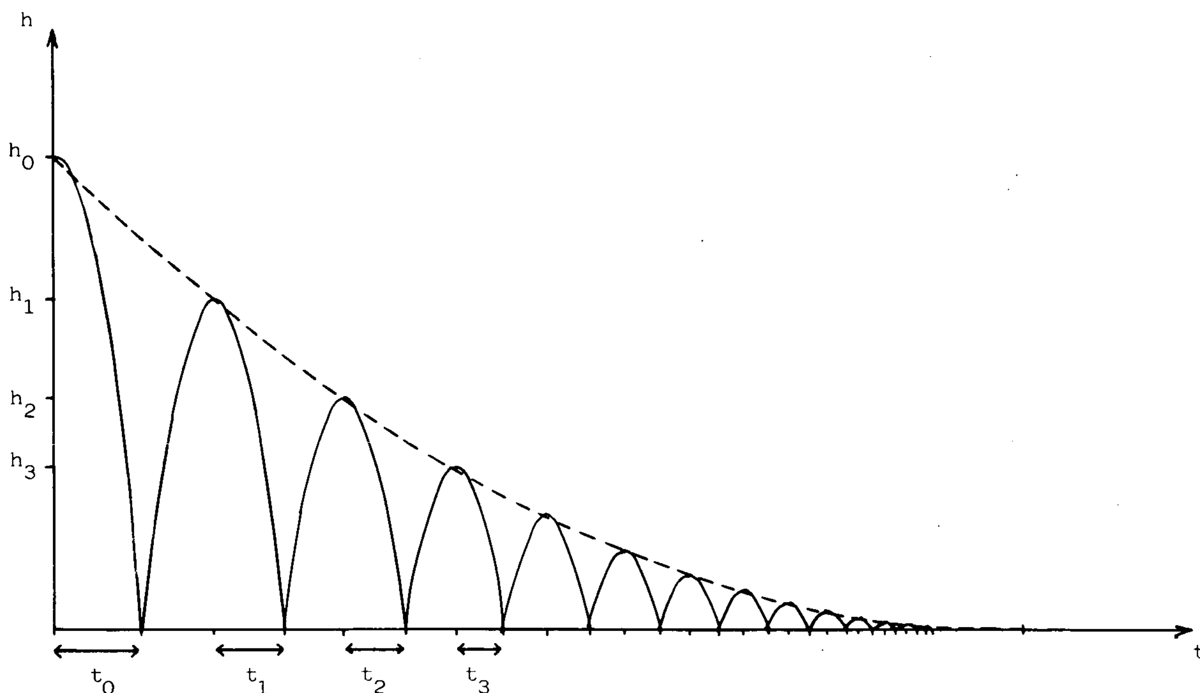
omdat ze in het vijfde jaar leerden dat

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}=2.$$

Op deze manier komen we vrij vlug tot de definitie van een rij als een functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$. De (omgevingen)definitie van 'limiet van een rij' halen we uit de limietdefinitie voor reële functies door te beperken tot $\mathbb{N}$.

Meer aandacht besteed ik aan de motivatie van een exacte definitie voor (convergentie van) een reeks. Voor de leerlingen is een reeks op dit moment een (oneindige) som. Allerlei manipulaties die bij 'gewone' sommen toegelaten zijn, vinden zij dan ook vanzelfsprekend. Met reeksen zoals

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$



Figuur 4

laat ik zien dat hierdoor heel wat tegenstrijdigheden kunnen ontstaan (en in de geschiedenis ook ontstaan zijn). Dit doet bij de leerlingen twijfels oprijzen over de berekeningen die we reeds maakten in het intuïtieve luik van het hoofdstuk. Deze 'twijfelfase' motiveert een veilige, exacte definitie van 'reeks', waarmee alles precies gecontroleerd kan worden. Na de definitie van een reeks als rij van partieelsommen bewijzen we exemplarisch enkele reeds stilzwijgend gebruikte eigenschappen zoals het vooropzetten van een factor vòòr een reeks (veralgemeende distributiviteit).
Na een aantal 'klassiekere' onderwerpen (convergentiecriteria e.d.) besluit ik het hoofdstuk met het verrassende verband tussen repeterende decimale getallen en meetkundige reeksen: de formule voor de som van de meetkundige reeks levert de schrijfwijze van het getal als breuk op! Een speciaal geval hiervan is de gelijkheid tussen b.v. 0,999... en 1. Zo'n tweede en diepere kennismaking met het moeilijke begrip 'reëel getal' is naar mijn mening geen overbodige luxe.

Noten

1 Met acht uur wiskunde per week.
2 De hier vertelde aanpak van 'rijen en reeksen' werd reeds meer uitvoerig beschreven in *Uitwiskeling* 4/1 (november '87).

Bibliografie

J. Deprez, M. Roelens, *Rijen en reeksen*, Uitwiskeling 4/1 (nov. 1987), 12-54.

C. Hauchart, N. Rouche, *Apprivoiser l'infini*, Proposition 14, G. E. M., Louvain-la-Neuve (Ciaco), 1987.

S. R. Lay, *A geometric view of the geometric series*, Mathematics Teacher 78/6 (1985), 434-435.

***Illustraties:** Abdon van Bogaert.*

Boekbespreking

Lehmann, *Testing Statistical Hypothesis* (2nd edition).

Na de eerste editie in 1959 is uitgekomen de tweede editie van E. L. Lehmann's Testing Statistical Hypothesis'. Het boek geldt als een standaardwerk voor de mathematische statistiek.
Het geeft een degelijke theoretische inleiding in het toetsen van hypothesen en het schatten m.b.v. betrouwbaarheidsintervallen.
Na het geven van de nodige achtergrondinformatie over statistische beslissingsprocedures en waarschijnlijkheidsrekening, komen de volgende onderwerpen aan de orde:
- uniform meest onderscheidende toetsen (lemma van Neyman – Pearson)
- zuiverheid
- invariante toetsen
- lineaire hypothesen (univariaat en multivariaat)
- minimax principe.

Het boek bevat verder veel voorbeelden en opgaven. Al met al geen praktisch boek, maar wel zeer geschikt voor iemand die meer wil weten van de theoretische achtergrond van het toetsen van hypothesen.

Jan Eisenga

Mededeling

Wiskunde en Onderwijs

Voor het abonnement op Wiskunde en Onderwijs is men het komende kalenderjaar onveranderd 550 BF verschuldigd, af te dragen aan de penningmeester van de VVWL.
Nieuwe abonnees kunnen zich opgeven bij de penningmeester van de VVWL, Th. Coppens, postbus 63, B-2080 Kapellen, België. Zij zijn dan automatisch ook lid van de VVWL, onze Vlaamse zustervereniging, en ontvangen het Mededelingenblad.
Het tijdschrift verschijnt vier keer per jaar. Elk nummer beslaat ongeveer 100 bladzijden. behalve didactische artikelen bevat het tijdschrift ook veel bijdragen van wiskundige aard.

P. G. J. Vredenduin

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Opgave 614

De vorige maand maakte ik melding van de Nederlandse kubusdag die voor de negende maal wordt gehouden. De laatste jaren worden naast de draaikubus van Rubik ook andere puzzels besproken: schuifpuzzels, inpakproblemen, enz....

Ook internationaal worden dit soort bijeenkomsten gehouden. Op zondag 27 augustus 1989 kwamen 58 puzzelaars bijeen in het Ramada Inn hotel te Londen. Voorgaande jaren was Jerry Slocum uit Beverly Hills de organisator. Deze keer werd het voor het eerst in Europa gehouden door de bereidheid van Edward Hordern om deze 'Tenth International Puzzle Party' te organiseren. De deelnemers zijn allen geïnteresseerd in puzzels: zowel puzzelontwerpers als puzzelverzamelaars.

Als deelnemer kan men entree betalen of men maakt voor de andere deelnemers een puzzel. U begrijpt: iedereen ging met een doos vol nieuwe puzzels weer huiswaarts.

David Singmaster uit Londen gaf aan alle deelnemers zijn 'Fourth Preliminary Edition' van 'Sources in Recreational Mathematics'. Verder een stencil met 52 problemen. Één van die problemen gaat als volgt:

Een Arabische sjeik had drie broers. Hij stierf en, volgens de gewoonte, stond er in zijn testament dat zijn broers voor zijn vrouwen moesten zorgen. De oudste van de broers kreeg de helft van het aantal vrouwen, de tweede broer 1/3 gedeelte en de jongste 1/7 gedeelte. Toen ze over wilden gaan op de verdeling ontdekten ze dat de sjeik 41 vrouwen had. Toen zaten ze met hun handen in het haar, want hoe moesten ze dit aantal verdelen? Ze riepen tenslotte de hulp in van oom Omar, die wel slim was, maar niet rijk: hij had slechts 1 vrouw! Hoe loste hij dit probleem op?

Waarschijnlijk kent u dit probleem. De vraag van deze maand is echter: bepaal het aantal drietallen $1/a$, $1/b$ en $1/c$, die in zo'n probleem gebruikt kunnen worden, met $a \leqslant b \leqslant c$. Verder zijn a, b en c gehele positieve getallen.

Ik zou het op prijs stellen als u BEWIJST dat het gevonden aantal ook inderdaad het maximale aantal is.

Ook voor deze puzzel heeft u een maand de tijd om hem op te lossen en in te sturen aan bovenstaand adres. Een ieder die het juiste aantal met een correct bewijs vindt, maakt kans op een boekenbon van vijfentwintig gulden.

▶ Oplossing 611

Als hommage aan mijn voorganger moest de volgende alphametic worden opgelost:

```
  VRE
  DEN
 DUIN
   80
 ----- +
HOERA
```

Uiteraard moest HOERA maximaal zijn. Maar door de vele berekeningen op mijn kladpapier was deze zin in mijn uiteindelijke tekst weggevallen. Desondanks is er heel erg enthousiast aan dit probleem gepuzzeld. Zowel handmatig (hersenmatig ?) als machinaal. Gedurende de gehele inzendtermijn van een maand druppelden de oplossingen in mijn brievenbus. Iedereen ontdekte dat de V en de U verwisseld konden worden, zodat er uiteindelijk $2 \times 3 = 6$ oplossingen waren:

$532 + 826 + 8796 + 80 = 10234$ met $5 \Leftrightarrow 7$.
$746 + 863 + 8953 + 80 = 10642$ met $7 \Leftrightarrow 9$.
$278 + 984 + 9534 + 80 = 10876$ met $2 \Leftrightarrow 5$.

Alle inzenders die minstens één goede oplossing instuurden hebben meegeloot voor de boekenbon.

De inzendingen varieerden van een computeruitdraai tot een volledig beredeneerde oplossing. Het enthousiasme was groot: 'Dank voor een leuk uurtje puzzelen' (*Markus Nijmeier*).

De heer *Nihom* maakte me attent op een deling bestaande uit 152 kruisjes en 7 zevens van professor Schuh in de zesde jaargang van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (1918/1919).

De heer *Van den Brom* vraagt zich af of de 'sleutel' 0123456789 wel eens een Nederlands woord of een zin met betekenis kan zijn. Mag ik heel eerlijk zijn? Ik denk dat dát een verschrikkelijk moeilijke opgave is, want ook de alphametic zelf moet betekenis hebben!

Dank ook aan de heer *Van den Akker* met zijn volledig uitgeschreven oplossingsmethode die hij als titel meegaf: 'De oplossing van een boeiend probleem'. Helaas zal hij, net als een aantal anderen, moeten ontdekken dat D = 9 wél mogelijk is in combinatie met HOE = 108.

Gelukkig is deze opgave ook aan een aantal leerlingen opgegeven, getuige de inzendingen die ik mocht ontvangen. Hulde!

De heer *Kool* geeft gehoor aan de oproep 'Nieuwe opgaven met oplossingen...' met de opgave:

VRE + DEN + DUIN = HOERA

Verder vermeldt hij een andere 'klassieker' (?):

DONALD + GERALD = ROBERT

Uiteindelijk komen we terecht bij de winnaar van de allereerste boekenbon van vijfentwintig gulden:

Na loting is dat geworden de heer *J. Haubrich*, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven.

Onze hartelijke gelukwensen.

● Verenigingsnieuws ●

▶ Jaarrede 1989

Hoewel het hewet-experiment op het vwo reeds enige jaren beëindigd is en we al bijna vergeten zijn dat we vroeger wiskunde I en II gaven, mag men over de examenresultaten van wiskunde A nog niet tevreden zijn. Vooral onder de leerlingen die alleen wiskunde A, zonder wiskunde B of natuurkunde, in hun pakket hebben, is het aantal onvoldoendes op het eindexamen zorgwekkend. Bovendien blijkt op regionale examenbesprekingen dat de benadering van wiskunde A door docenten zeer uiteen loopt. Dit kan leiden tot grote meningsverschillen tussen de twee correctoren en tot grote verschillen in beoordeling van examenwerk en dus zakken of slagen van leerlingen.
Om meer duidelijkheid te scheppen, is de vereniging in samenwerking met de CEVO gekomen tot de instelling van een 'Werkgroep interpretatie examenprogramma wiskunde A'. Deze werkgroep zal zich in eerste instantie richten op het onderdeel 'kansrekening en statistiek'.
Op zaterdag 6 januari 1990 zal het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap gehouden worden in Amersfoort. Het thema is 'Kansrekening en statistiek op het vwo; mogelijkheden en onmogelijkheden voor wiskunde A'. Dit symposium, dat speciaal bedoeld is voor docenten in het voortgezet onderwijs, mag ik u bijzonder aanbevelen.

Ook het hawex-experiment op het havo krijgt steeds meer vaste vorm. Dit jaar zijn de eerste eindexamens op de drie experimentscholen geweest. Zowel door 'Euclides' als door de 'Nieuwe Wiskrant' heeft u van de examenopgaven kennis kunnen nemen. Het gemiddeld cijfer voor wiskunde A was 7,6 met 7% onvoldoende; voor wiskunde B was het gemiddeld cijfer 6,0 met 36% onvoldoende. Gezien het niveau van de opgaven mag hier van een succes worden gesproken.
Dit schooljaar hebben zich 25 volgscholen bij het experiment aangesloten. Op verzoek van de Werkgroep Hawex, ondersteund door de NVvW, heeft de staatssecretaris besloten dat de faciliteiten voor het Hawex-ontwikkelteam met een jaar zijn verlengd, zodat de begeleiding van deze 25 scholen voor dit schooljaar verzekerd is. Voor een goed vervolg van het experiment is het te hopen dat ook voor volgend schooljaar faciliteiten voor het ontwikkelteam zullen worden verstrekt.
Op verzoek van de staatssecretaris heeft de werkgroep Hawex voorstellen gedaan voor de examenprogramma's wiskunde A en B havo in een meer gedetailleerde formulering dan we tot nu toe gewend waren, zodat docenten en leerlingen een zo groot mogelijke duidelijkheid wordt gegeven.
Hiernaast zullen de werkgroep Hawex en de NVvW nog een toelichting op het programma opstellen en zorgen voor vraagstukkenbundels zoals u dat van de vereniging gewend bent.
Andere activiteiten van de vereniging met betrekking tot Hawex zijn de werkgroepen op de studiedagen, de voorlichtingsbijeenkomsten jongstleden maart op de drie experimentscholen, voorlichtingsbijeenkomsten in november aanstaande, speciaal voor docenten mavo en lbo en voorlichtingsbijeenkomsten in het volgend voorjaar.
Ook aan voorlichting aan de leerlingen is gewerkt. Het project 'Wiskunde en Emancipatie' heeft, in samenwerking met het Hawex-team, voor hen een brochure samengesteld. Ook is een brochure voor schoolleiders, wiskundeleraren en decanen vervaardigd.
Van beide brochures zijn vandaag eerste versies aanwezig die na een eventuele bijstelling in de tweede helft van november aan alle scholen zullen worden toegezonden.

De COW werkt aan een programmaverandering voor de eerste fase van het voortgezet onderwijs. In

augustus 1992 moeten de voorstellen daartoe bij het ministerie worden ingediend. Die voorstellen behelzen behalve een programmaverandering voor alle scholen ook een nieuw examenprogramma voor mavo en lbo C- en D-niveau. In het afgelopen voorjaar is door het 'Raamplan' al iets zichtbaar geworden van het soort leerstof dat door de COW en het uitvoerend team ontwikkeld wordt. Dit Raamplan is vandaag voor geïnteresseerden ook te koop. Bovendien leest u in 'Euclides' regelmatig in de vaste Kolom over het werk van het team W12-16. Namens de NVvW zitten twee vertegenwoordigers in de COW. In dit cursusjaar zullen voor het eerst op twee scholen experimentele examens mavo/lbo worden afgenomen. Weliswaar nog gebaseerd op het oude programma, maar daarin zullen toch wel een aantal nieuwe trends zichtbaar worden.

De COW heeft ook als taak eindtermen voor het vak wiskunde in de Basisvorming op te stellen. Een aantal van u heeft in het voorjaar de hoorzittingen bezocht die onze vereniging samen met de VALO Wiskunde en Informatica heeft georganiseerd over de eerste versie van de eindtermen (het blauwe boekje). De opmerkingen daar gemaakt, zijn gebundeld en ter kennis gebracht van de COW. Door de COW is een tweede versie van de eindtermen inmiddels aan het ministerie verstuurd. Deze zal samen met de eindtermen van andere vakken een rol spelen bij de discussie rond de mogelijke nieuwe wetgeving voor 'Basisvorming'.

In het eindexamen wiskunde voor mavo/lbo C en D gaan de open vragen weer een grotere rol spelen. De vaksectie wiskunde heeft van het bestuur van de CEVO toestemming gekregen om de verdeling meerkeuzevragen/open vragen van 70%/30% in 50%/50% te wijzigen.
Het bestuur betreurt het dat de CEVO niet van plan lijkt te zijn een voorbeeld van het nieuwe examen naar de scholen voor lbo en mavo te sturen. Daarom hebben wij besloten om zelf een voorbeeldexamen samen te stellen en te distribueren, om op deze wijze docenten en leerlingen bij het lbo en mavo een helder beeld te geven van de veranderingen in het examen.
In de vaksectie wiskunde van de CEVO vindt een aanzienlijk aantal wijzigingen plaats. Sinds 1 augustus is Hans van Lint lid van de subsectie havo/vwo namens de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, terwijl Nanda Querelle, die namens onze vereniging lid is van de subsectie mavo/lbo, van de DOP-regeling geniet zodat het bestuur nu uitziet naar een opvolgster of opvolger.
Daar, volgens de jongste inzichten van het ministerie, de bemoeienis met het maken van eindexamenopgaven haaks staat op de controlerende taak van inspecteurs, hebben de inspecteurs Kleijne en Nijenhuis hun voorzitterschap van de subsecties havo/vwo, resp. mavo/lbo moeten neerleggen. Zij worden opgevolgd door prof. dr. J. van de Craats voor havo/vwo en drs. A. A. van Kuijlenberg voor mavo/lbo.
In Euclides van juni vroeg het bestuur in de rubriek 'Van de bestuurstafel' aan de leden om het bestuur eens te laten weten hoe men staat tegenover het vermelden van de maximale score per vraag bij de examenopgaven. Deze oproep heeft geen reacties opgeleverd, maar bij de regionale examenbesprekingen is wel gebleken dat de meningen over wel of niet vermelden zeer uiteen lopen. Het lijkt het bestuur daarom niet mogelijk een standpunt hierover namens de vereniging naar buiten te brengen.

Aan de Hogeschool Holland is het driejarig project Wiskunde en Emancipatie van start gegaan. Het ministerie van O & W heeft de Hogeschool extra subsidiegelden toegekend om op het gebied van emancipatie binnen het wiskunde-onderwijs als speerpunt-hogeschool te functioneren. Het gaat er om in de opleidingen tot wiskundedocent en in nascholingsactiviteiten emancipatieaspecten te verwerken. Daarnaast wordt binnen het project gewerkt aan een omscholing tot tweedegraads wiskundedocenten voor herintredende vrouwen.

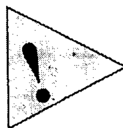
De Werkgroep Vrouwen en Wiskunde heeft een inventarisatie gemaakt van het wiskunde-onderwijs op het lhno. De resultaten van dit werk zullen zeer binnenkort in druk verschijnen. Verder heeft de werkgroep twee kleurrijke affiches uitgegeven. Deze zijn geschikt om uw wiskundelokaal wat op te sieren. Ze zijn hier vandaag te koop.

Een aantal leden van de vereniging heeft in samen-

werking met de NVORWO, de Nederlandse Vereniging ter Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs, een reeds enige tijd sluimerend plan uitgewerkt om een didactiekprijsvraag uit te schrijven. Wij zijn er namelijk van overtuigd dat er onder de docenten wiskunde velen zijn die zo af en toe andere didactische wegen inslaan dan de gebruikelijke uit de leerboeken.
Om deze anonieme ontwerpers meer in de openbaarheid te laten komen en vooral om hun ontwerpen meer bekendheid te geven, is er namens de twee verenigingen een prijsvraag uitgeschreven. De opdracht is om geconcretiseerd lesmateriaal te ontwerpen voor een afgerond lessenonderdeel in enigerlei bereik van het reguliere wiskunde-onderwijs. Afhankelijk van de kwaliteit en het aantal inzendingen op 1 mei 1990 zullen zowel voor basisonderwijs, algemeen voortgezet onderwijs en beroepsonderwijs prijzen uitgereikt worden. Er zal naar worden gestreefd de prijsuitreiking te doen plaats vinden voor het einde van 1990.

Aan het begin van dit schooljaar ontving u een nieuw, groen tijdschrift met daarop een magisch vierkant. Het ons welbekende tijdschrift 'Euclides' kreeg een nieuw jasje, waardoor nog duidelijker haar betekenis 'Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren' en 'Vakblad voor de Wiskundeleraar' wordt aangekondigd. De redactie slaagt er in de weg te blijven volgen, die zij na de problemen van enige jaren terug is ingeslagen.
Wij wensen de redactie veel succes bij haar streven naar een blad waar elke docent wiskunde naar uitkijkt.
De redactie heeft dit jaar afscheid genomen van twee redactieleden, die jaren aan Euclides verbonden zijn geweest. Henny Susijn verlaat de redactie na 8 jaren, terwijl Piet Vredenduin dit doet na 32 jaren inzet voor Euclides. Een woord van dank aan hen beiden is zeer zeker welverdiend.

In het overzicht van onze wiskundewereld dat ik u schetste, vindt u regelmatig de inzet van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren terug. Niet alleen door studiedagen, hoorzittingen en examenbesprekingen, maar ook door gevraagde en ongevraagde adviezen aan de staatssecretaris – denk maar aan wiskunde verplicht – en regelmatige contacten met de inspectie tracht de vereniging te voldoen aan de statuten:
Het doel van de vereniging is aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen die betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde aan scholen bedoeld in de Wet op het Voortgezet Onderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs.
Uw lidmaatschap, uw meedenken met het bestuur en uiteraard ook uw contributie maakt het mogelijk dat de vereniging zich sterk maakt voor het wiskunde-onderwijs.
Door uw reclame bij collega's die nog geen lid van de vereniging zijn, maakt u uw vereniging sterker en geeft u uw collega's de kans om zelf financieel bij te dragen aan onze vereniging in plaats van te profiteren van uw contributie.



Kalender

13 december 1989: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
6 januari 1990: Amersfoort, Wintersymposium Wiskundig Genootschap. Zie Euclides 65, 3 blz. 92.
10 januari 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
14 februari 1990: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
16 maart 1990: Op de scholen voor havo/vwo, Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade.
18 en 19 maart 1990: Beekbergen, VALO-conferentie 'Wiskunde in de onderbouw'. Zie Euclides 65, 2 blz. 59.